
Section Modelling/Simulation

Methods and Tools to Design Microsystems

J. Mehner, F. Bennini, W. Dötzel

Chemnitz University of Technology
Department of Microsystems and Precision Engineering
D-09107 Chemnitz, Germany

Abstract:

With the rapid development in the field of microtechnologies there is a growing need for fast and accurate design tools. Latest microsystems which are widely used as sensors and actuators comprise complex geometrical structures, different transducing principles, advanced electronic circuitry and digital signal processing units. A comprehensive computer support is required to get a full understanding of the device behavior, to optimize the system performance and to enable competitive industries to get time and cost efficient prototypes.

This paper presents an overview of present design strategies, tools and algorithms which are applied successfully in microelectromechanical component design. The mechanical behavior of microstructures is almost ever strongly affected by thermal stress, electrostatic forces, viscose damping in the surrounding fluid and by the cooperative play with the electronic circuitry. Difficulties occur from the tight bi-directional coupling of individual physical effects in typical MEMS. For efficient yet accurate design of microsystems, it is vital to employ advanced simulation techniques to account for nonlinear effects as electrostatic spring softening, electrostatic pull-in, gas film damping and mode coupling. The accuracy, efficiency and stability of various simulations within ANSYS will be discussed and compared against experimental results.

1 Introduction

Microelectromechanical systems (MEMS) can be considered as an extension to microelectronic components. In addition to the electronic circuitry those systems contain at least mechanical and electrostatic components on the same die. Inherently there are thermal (caused by the power loss) and fluidic fields (caused by surrounding air) involved. This integration with non-electronic parts enables integrated circuits to sense physical quantities (accelerations, forces, temperature changes, etc.), to process and store these measured data and finally to communicate with or act on the environment (dosing pumps, microdisplays, etc.). Microsystems became attractive to the industry due to the potential to integrate and to miniaturize whole systems, the possibility to manufacture cost effectively (microelectronic batch process) and the astonishing features of MEMS. Remarkable is that miniaturized structures are able to oscillate in resonance with frequencies in the range of megahertz (radio frequency spectrum). Such a high natural frequency enables one to integrate a complete radio receiver on a single die. Electronic filters require still large coils on printed circuit boards but should be replaced by integrated MEMS in the future. Surprisingly, micromechanical oscillators are not subject of any fatigue or aging as known from conventional grained materials like steel because the flexures are made of single crystal materials.

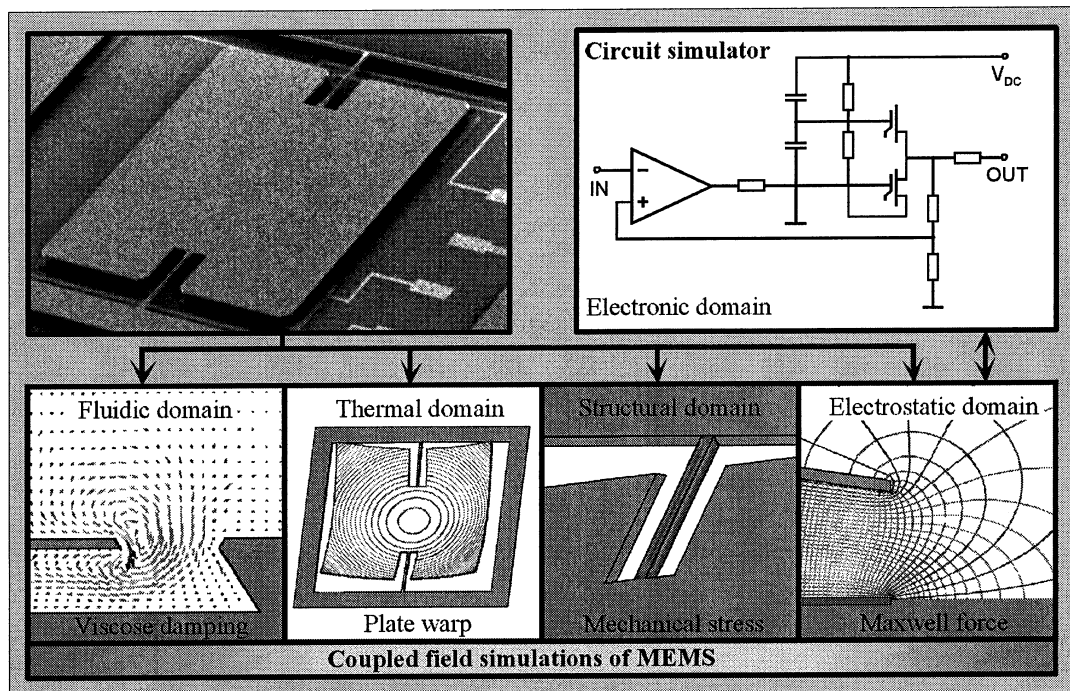


Fig. 1: Influence of different physical domains on the mechanical behavior of micromirrors

In the following paper the movable part of MEMS will be regarded as the component of our interest. Micromechanical components usually consist of almost rigid bodies (comb drives, seismic mass) which are attached by flexible structures (beams, membranes, plates) to a frame. Nevertheless the remaining deformation state of the moving body, often called shuttle mass, is an essential design quantity since it influences the performance of most MEMS. For instance plate warping of micromirror actuators is responsible for the optical quality of display systems, or warp of comb drive systems may limit the total operating range.

Movable microstructures are necessary to transform physical quantities into electrical signals (sensor mode) or vice versa, to drive parts of the structure to a desired position (actuator mode). In both cases accompanying fields are obligatory to transfer energy between different physical domains and must be considered in appropriate models at once.

MEMS's design is complicated by the fact that different physical phenomena are acting on the same part of a structure with strong interactions to each other [1] [2]. Fig. 1 shows a simplified model of a torsion mirror used for high speed laser scanning. Its mirror cell is simultaneously flexure and inertial mass in the mechanical domain, electrode of an electrostatic field in the electric domain, moving wall of a squeezed gap in the fluidic domain (underneath the mirror plate) and heating source in the thermal domain. Furthermore parasitic phenomena like intrinsic film stress, thermal mismatch and mechanical noise caused by air molecule collisions should call our attention. The component designer must have access to sophisticated design tools and a full understanding of all involved physical disciplines, in numerical mathematics, computer science and microtechnologies to obtain a proper layout. Mostly this turns out to be a big challenge. Our experience with design of complex and heterogeneous systems will be discussed.

2 Multiple Energy Domain Simulations

2.1 Electrostatic-structural analysis

Most transducers in microsystems technology are based on electrostatic fields. There are strong bi-directional interactions between the electronic circuit (e.g. a controller unit, high voltage amplifier), the movable structure and the electrostatic field quantities. Three modeling techniques are up to date (Fig. 2):

- The transducer is represented by lumped parameters and transformed to a language which is compatible to standard circuit simulators like SPICE or VHDL based systems. This approach is preferred for mechanical systems where the seismic mass is almost rigid. The mechanical domain can be represented by a few degrees of freedom which are in general the rigid body displacements at the center of inertia (u_x , u_y and u_z). All system parameters are usually linearized at the operating point and considered as independent from each other. Hence the model is limited to small oscillation amplitudes.
- A second approach allows to consider flexible structures and large displacement amplitudes [3]. This approach makes use of a transducer element which is attached to a certain number of points which are specified at the movable electrode. At any point where the transducer elements are attached we compute the electrostatic field quantities such as local electrostatic forces, electrode charge or the induced current by means of a previously defined capacitance-stroke relationship. This approach is very simple in case of a small and smooth gap between electrodes. Electrostatic fringing fields and mechanical non-linearities such as stress stiffening are neglected. Export to system simulators becomes possible via matrix condensation techniques.
- A full 3-dimensional model of the coupled domain is definitely most accurate but very resource consuming. It gives insight into the true nonlinear behavior of the device and can directly be coupled to a circuit simulator by simple repeated data exchange in each time step (Fig. 3). This approach can either be realized via “load vector coupling” where the electrostatic forces and structural displacements are exchanged after each time step or by a self consistent system matrix description of the electromechanical system.

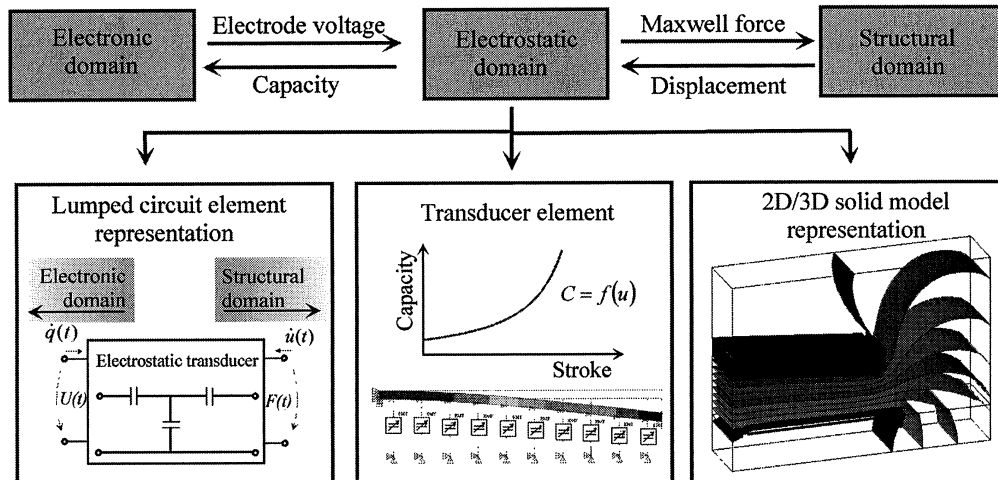


Fig. 2: Methods to consider interactions of electromechanical systems

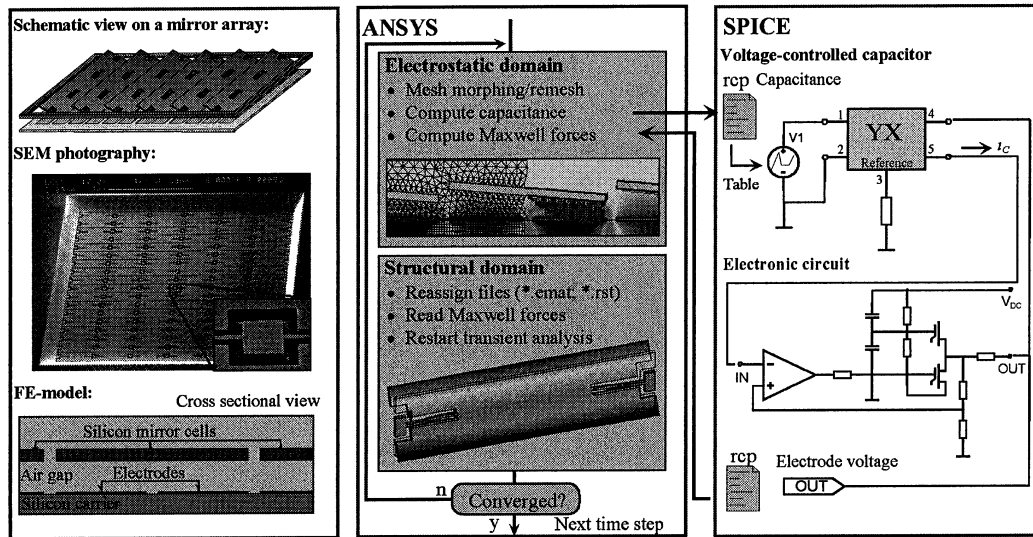
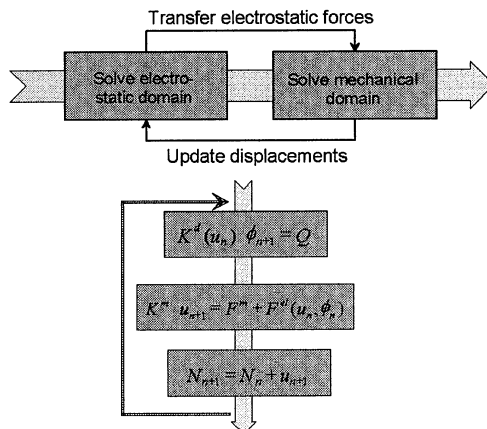


Fig. 3: Load vector coupling of a full 3D finite element model and a circuit simulator

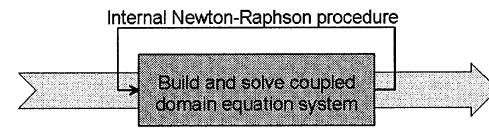
Load vector coupling is very common to analyze coupled fields because this approach allows one to connect different commercial simulators which are specialized on a single physical discipline. This becomes possible since just results of the previous simulation run are necessary to start the next iteration loop. Access to system matrices, e.g. the Jacobian derivatives, is not necessary. Drawback is slow convergence if the spectral radius of the coupled system is almost one. This happens close to pull-in where the movable structure snaps to the counter electrode [4]. A harmonic response analysis is not possible since electrostatic softening terms are neglected.

Matrix coupling requires multi field elements which are usually implemented by the software developer. Alternatively the customer needs access to the internal source code to implement their own governing equations of the coupled system. In practice this turns out to be rather complicated because coupling submatrices are difficult to establish in 3D case on a finite element basis. Right now there is no commercial tool on the market which captures all terms of Fig. 4 accurately.

Load vector coupling:



System matrix coupling:



FE equation system:

$$\begin{bmatrix} K^m + K^{el} & K^k \\ K^{kT} & K^d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^a \\ Q^a \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F^{nr}(u, \phi) \\ Q^{nr}(u, \phi) \end{Bmatrix}$$

Coupling submatrices:

$$K^{el} = \frac{\partial F^{el}}{\partial u} = -\frac{V^2 \epsilon A}{(h-u)^3} \quad K^k = \frac{\partial F^{el}}{\partial \phi} = \frac{V \epsilon A}{(h-u)^2}$$

Fig. 4: Load vector and system matrix coupling of electromechanical systems

Matrix coupling converges very fast even in case of strongly coupled systems. On the other hand one should have in mind that matrix coupling may compute the wrong (unstable) equilibrium state or it oscillates around pull-in. The structure does not snap to the ground electrode as happens in practice if the critical voltage is reached.

2.2 Fluid flow-structural analysis

One of the most critical issues in MEMS design is to determine the energy dissipation of moving structures. Especially for harmonic response and transient simulations it is necessary to compute accurate damping ratios for the most dominant eigenmodes. Energy dissipation should be minimized for transducers which operate at resonance or should be almost 0.7 to optimize the speed of response for mechanical sensors like accelerometers or gyroscopes.

While structural damping within the microstructure can mostly be neglected (volume effect), viscous damping (surface effect) in the surrounding medium increases rapidly with growing miniaturization. In addition to damping forces the fluid flow can affect the spring stiffness as a result of compression and slightly increases inertial forces due to the mass of adhering films near the surface. Damping can be controlled by the shape of microstructures (etched channels or holes), by the gap size to adjacent walls and by the chosen ambient pressure. Mathematical models of gas damping are governed by the general Navier-Stokes-equation, but in most cases they can be simplified to Reynold's squeeze film equation (plates move perpendicular to each other) or slide film equation (transversal motion) known from lubrication theory. Finite element results of an oscillating mirror cell are shown in Fig. 5 [5].

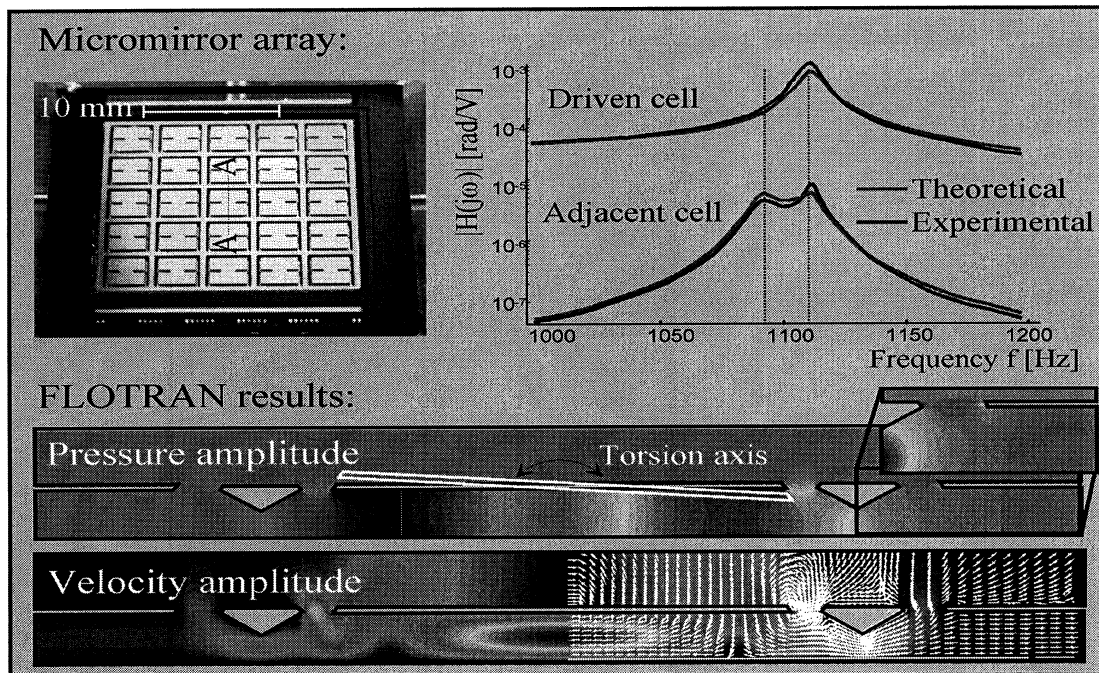


Fig. 5: Gas pressure and fluid velocity data are necessary to compute damping ratios

Similar to the transient analysis of coupled electrostatic-structural problems reported in the previous chapter, fluidic interactions can be treated in a sequential iteration scheme where plate velocities and fluidic forces are exchanged in each time step. This method is preferred for highly non-linear vibrations.

For squeezed gas films, the Navier-Stokes equation can be simplified to Reynold's squeeze film equation known from lubrication theory - a 2D partial differential equation describing in-plane pressure distribution between plates. Arbitrary plate shapes including perforation holes, flexible membrane-type structures and tilting motion are accepted. The application of Reynold's equation is constrained to small vibration amplitudes compared to the gap and zero pressure amplitude at all plate edges. When solved with heat flow analogy, heat generation rate substitutes local plate normal velocity and temperature is interpreted as pressure.

Squeeze film damping has considerable impact on microstructures and may totally suppress the resonance peak in some cases. It is heavily dependent on the ratio of lateral dimensions and gap distance. The transition from dissipative lateral flow to compression in high-frequency devices (cut-off) leads to completely different pressure images as illustrated in Fig. 6. It is relevant for devices with gaps lower than 5 μm and operating frequencies of several 10 kHz and more. Very close gaps may even cause the cut-off frequency to drop below the natural frequency of a structure. Since the damping effect turns into spring effect above the cut-off frequency, sensitivity changes and resonance shift in the response function are common in such cases.

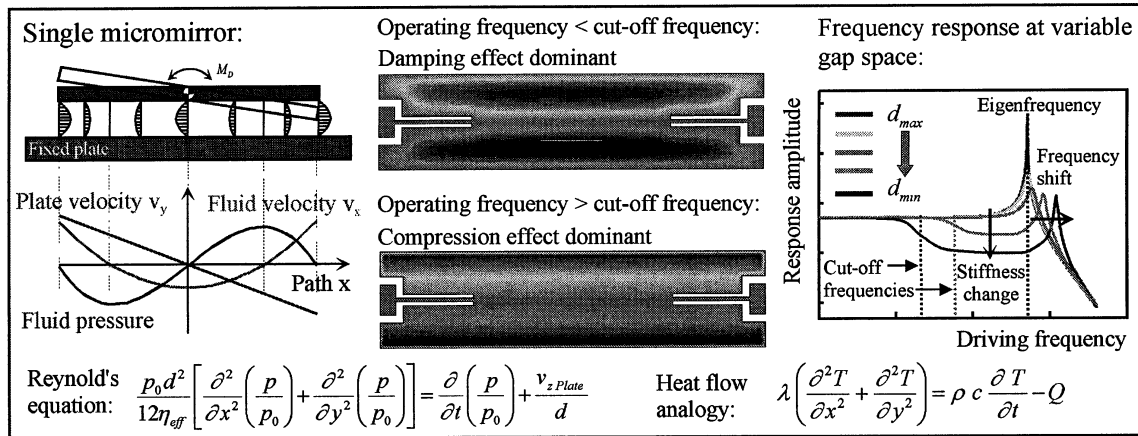


Fig. 6: Squeeze film theory to describe dissipative effects at different driving frequencies

A significant acceleration of dynamic analysis procedures for quasi-linear systems is achieved by the modal superposition method. CFD analysis is now exploited to extract proper damping parameters for the most significant eigenmodes. In a subsequent transient or harmonic structural analysis, the obtained parameters are applied to the mechanical system via alpha-beta or modal damping.

The extraction procedure for modal damping ratios is straightforward and starts with a modal analysis in the structural domain. In subsequent transient CFD analyses - one needed for each derived eigenmode - the eigenvectors are successively imposed unto the fluid domain model

as sinusoidal displacement loads with their associated eigenfrequencies. Damping ratios are retrieved by mapping reaction force distribution to the eigenmodes. The unidirectional algorithm without fluid-to-structural reaction feedback takes advantage of the fact that fluidic reaction forces leave shapes of eigenmodes unchanged although they attenuate amplitudes.

The modal decomposition method for automatic generation of reduced order macromodels relies on modal damping parameters as well. This approach will be described in the next chapter.

3 Fast and Accurate Reduced Order Macromodels for MEMS

3.1 Motivation of Using Macromodels for MEMS Design

For virtual prototyping of electronic circuits and control systems a wide range of commercial circuit and system simulation tools including comprehensive device libraries is available today. However, MEMS design engineers still long for an efficient link between their FEA tool and their circuit or system simulator. The electromechanical component of a MEMS is commonly analysed in detail using FEA, and at the end of this procedure the question is: How to obtain a black-box model from these accurate results exhibiting just input-output interface terminals, which can directly be drawn into the circuit or system schematic by a simple mouse click? In the language of system simulation these black-boxes are called macromodels.

As in FEA, solution accuracy and speed define crucially the performance of a system level simulation. The requirements for both methods are, however, quite different: A transient dynamic FEA may be set up for several 10 oscillation cycles at a model of several 1,000 (sometimes several 10,000) DOF. In contrast, on the system level the signal complexity may include several 1,000 to 100,000 cycles. In order to obtain the result within seconds or minutes, the DOF number in a system schematic is kept in the order of hundreds.

In the most simple case, lowest-order macromodels of electro-mechanical parts are manually designed apart from FEA by rigid-body approximations using lumped-parameter methods. The parameters of movable components - stiffness, damping, inertial mass and electrostatic coupling - are replaced by equivalent circuit elements, i.e. inductors, resistors, capacitors and controlled non-linear sources, or by system blocks, respectively.

The problem of these rigid-body models is that they do not represent the flexible nature of silicon components as it is captured by FE models. On the other hand, directly linking an FE-model into a transient system simulation as presented in the first chapters slows down the system solution process considerably. The most efficient and powerful way is to compress the FE model size by several orders of magnitude, to write a macromodel from the reduced data in a language which is compatible with the available circuit or system simulator and to proceed within the latter one only.

Reduced-order techniques have been available in numerical mechanics for a long time through substructuring and modal superposition [6]. As a novel requirement, the generation of reduced-order macromodels must link together the structural, electrostatic and fluidic domain, not neglecting non-linear characteristics.

3.2 Shape Function Methods

The deformation state and dynamics of mechanical systems is accurately described by weighted combination of mode shape functions (i.e. modal superposition). As a matter of fact shape function methods can be applied to non-linear systems, too [6] [7]. Geometric non-linearities, for instance stress-stiffening, can be regarded if the modal stiffness is computed from the first derivative of the strain energy function with respect to the modal amplitudes. Capacitance-stroke functions provide non-linear coupling between each eigenmode and the electrical quantities (i.e. electrostatic modal forces, electrical current) if stroke is understood as modal amplitude. Damping parameters are assigned to each eigenmode as described in the previous chapter. Modal representations of MEMS are very efficient since just one equation per mode and one equation per involved conductor is necessary to describe the coupled system entirely. The approach will be demonstrated subsequently at the example of in widely known electrostatic scanning micromirror [8].

Step 1: Reduction Procedure

The first step of the ROM generation is to determine which modes are really significant and to estimate a proper amplitude range for each mode. Several criteria can be applied, for instance the lowest eigenmodes of a modal analysis, modes in operating direction, or modes which contribute to the deflection state at a typical test load. Applying a unit voltage as test load at one electrode of the micromirror reveals that its motion is dominated by the rotational (1), transversal (2), and warp (6) eigenmodes. Next, the dependencies of the strain energy W_{Mech} and of all mutual capacities C_{ij} from the modal amplitudes are described by polynomial function fits. The necessary data points are obtained by imposing each eigenmode with varying amplitude to the mechanical model for strain energy and to an electrostatic space model for capacitance (Fig. 7). Modal damping parameters are obtained at a fluidic model (not shown here).

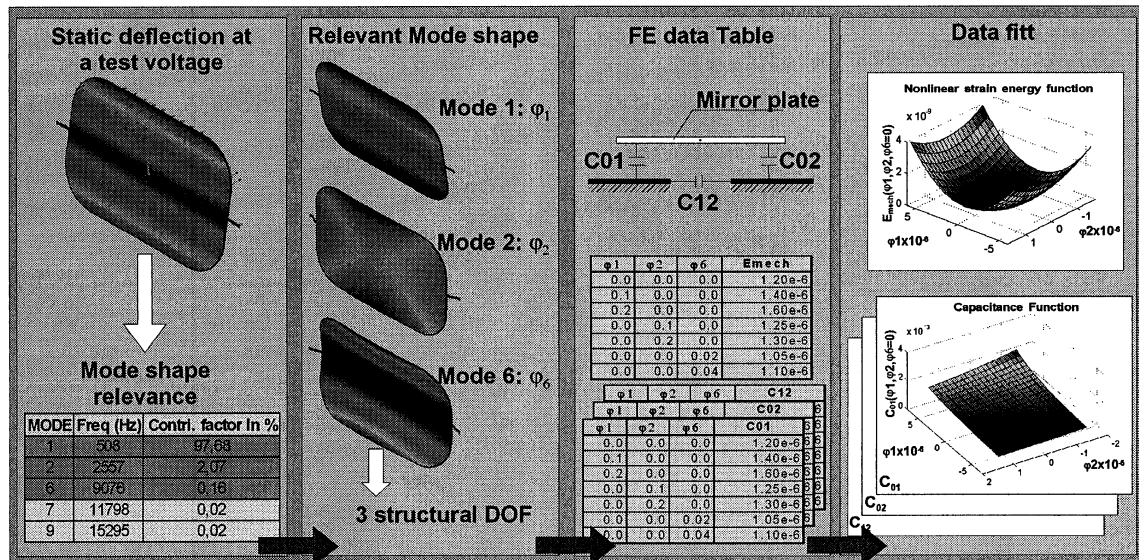


Fig. 7: Generation pass flow

Step 2: Export Macromodel

In the concept of modal superposition, each eigenmode represents a single independent resonator with modal mass m_i and modal damping d_i . The system schematic replaces the resonators equation-of-motion by a simple arrangement of summation, gain and integrator blocks. Polynomials for non-linear modal excitation forces and stress-stiffness forces are written into analytical-function blocks.

The structure of this schematic remains constant for all types of system simulators and needs therefore just to be exported into a model file using the appropriate macro language. In our example the model was generated for MATLAB/SIMULINK and has three voltage input ports V_i and three mechanical output ports carrying the elongations of eigenmodes 1, 2 and 6. A similar structure is available for network simulators where the electrical ports carry bi-directional signals according to the Kirchhoffian network theory (e.g. VHDL-AMS language).

Step 3: System Simulation

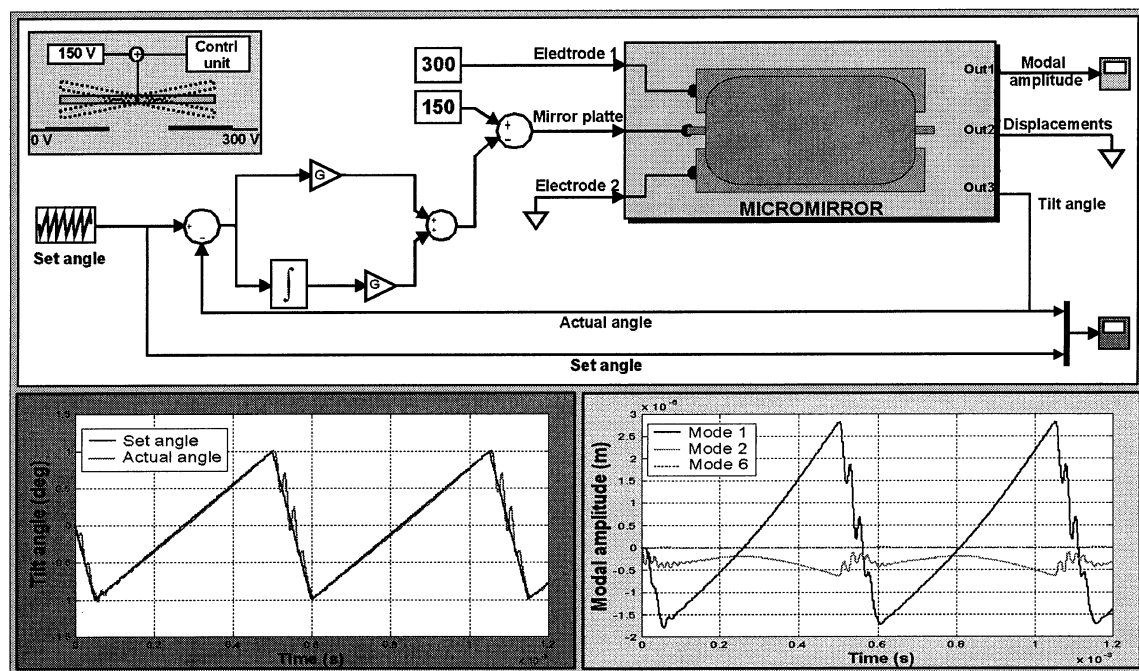


Fig. 8: Example of a system simulation using automatically generated macromodels

Combined with a feedback controller unit, the micromirrors rotation shall realize a smooth saw-tooth-like function for scanning image projection. The system simulation using MATLAB/SIMULINK traces the mirror motion in the three implemented modes. In practice, the transversal mode disturbs the electrostatic forces which are meant to drive only the rotational mode. The control loop must provide compensation for those and other disturbances, which is now the objective of circuit prototyping. Based on the information about the warp mode we are furthermore able to conclude on the reflection quality of the mirror (Fig. 8). A rigid-body based macromodel would only include the rotational mode, perhaps - with a strong degree of approximation - the transversal mode, too. The reduction of

FE data instead guarantees an accuracy level typical for FEA at a system analysis speed typical for system and circuit simulators.

4 Conclusion

The electrostatic-structural interaction impacts severely the dynamics of a MEMS component on one hand and makes up the signal link to the electronic circuit on the other hand. We have presented different methods to analyze multiple energy domains which occur in MEMS design. The developments in most institutes and engineering companies are based on various commercial tools for CAD, FEA, simulation of electronic circuits, control systems, multi-body systems and also the microfabrication processes. Many of these tools will be linked together by appropriate interfaces or used to extract data for reduced order models. We are still at the beginning of this progress.

Acknowledgement

This work was sponsored by the DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) Sonderforschungsbereich 379 and the Federal Ministry for Education and Research (project EKOSAS, V1514).

References

- [1] **Mehner J.:** Entwurf in der Mikrosystemtechnik, Dresdner Beiträge zur Sensorik, Band 9, DUB Dresden-München 2000
- [2] **Romanowicz, B.F.:** Methodology for the Modeling and Simulation of Microsystems, Kluwer Academic Publishers, Norwell Mass., 1998.
- [3] **Bennini F., Frühauf, J., Dötzel, W.:** High Force and Large Displacement Electrostatic Actuators with Curved Electrodes Using Silicon Bulk Micromachining, Actuator 2000, Bremen 2000
- [4] **Zienkiewicz, O.C.:** Coupled problems and their numerical solution, John Wiley & Sons Ltd., UK 1984
- [5] **Mehner J., Kurth, S., Dötzel, W.:** Simulation of Gas Damping in Microstructures with Nontrivial Geometries, MEMS '98, Heidelberg 1998
- [6] **Bathe, K.J., Gracewski, S.:** On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition, J. Computers and Structures, Vol.13, p. 699-707, 1981
- [7] **Mehner J., Gabbay L., Senturia, S. D.:** Computer Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels, J. Microelectromech. Syst. Vol. 9, June 2000, pp. 262-278
- [8] **F. Bennini, J. Mehner, W. Dötzel:** Computational Methods for Reduced Order Modeling of Coupled Domain Simulations. 11. International Conference on Solid- State Sensors and Actuators (Transducers 01), Munich, pp. 260- 263, Germany 2001

Simulation von biologisch-inspirierten Antrieben

K. Zimmermann¹, E. Gerlach¹, Huang Jianjun¹, C. Behn², C. Siebenhaar³

¹TU Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, PF 100565, D-98684 Ilmenau

²TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik u. Naturwissenschaften, PF 100565, D-98684 Ilmenau

³Fraunhofer Institut Angewandte Optik und Feinmechanik, Schillerstraße 1, D-07745 Jena

Abstract:

To understand the integrated function mechanisms of movement generation and force transmission in the living nature the mathematical modeling and the dynamic simulation are essential tools. For investigations in biomechatronics the multibody system (MBS) has shown itself as a suitable model. Observing the degree of abstraction in such models like multibody systems, it seems to be possible to generate new principles for grasping, manipulation and locomotion in technology, especially in microtechnology.

Biologically inspired locomotion systems are currently dominated by walking machines, i.e., systems performing pedal locomotion. Non-pedal forms of locomotion show their advantages in inspection techniques or applications in medical technology for diagnostic systems and minimally invasive surgery. Observing the locomotion of worms one recognizes a conversion of (mostly periodic) internal and internally driven motions into change of external position (undulatory locomotion). For realization of this type of locomotion non-symmetry in the external friction forces acting on the system is needed. Electromechanical worm prototypes applying the principles outlined above have been constructed and proved positive. Finally the stabilization of a robot arm with two degree of freedom using muscle-like actuators is discussed.

1. Einleitung

In der Technik relevante Bewegungsaufgaben lassen sich mit den Begriffen Prehension, Manipulation und Lokomotion beschreiben. Für die Entwicklung neuer Bewegungsprinzipien ist das Studium und die Analyse natürlicher Vorbilder von großer Bedeutung. Erst das genaue Erkennen und Verstehen der integrierten Funktionsmechanismen der Bewegungs- und Kraft-erzeugung bzw. -übertragung in der lebenden Natur wird zur schöpferischen Entwicklung technisch realisierbarer Bewegungssysteme neue Anstöße liefern.

Ein wesentliches Werkzeug dazu ist die mathematische Modellierung und die dynamische Simulation ausgewählter biologischer Bewegungssysteme auf unterschiedlichen, problemangepassten Modellierungsebenen. Die rasante Entwicklung in der Luft-/Raumfahrttechnik, im Maschinen-/Fahrzeugbau und in der Robotertechnik führte zu einer bemerkenswerten Renaissance der Mehrkörperdynamik. Auch für Untersuchungen auf den Gebieten Biomechanik und biomimetische Robotik hat sich das Mehrkörpersystem (MKS) als geeignetes Modell erwiesen. Stand der Technik auf den genannten Gebieten ist die konsequente Computersimulation der Dynamik von MKS. Unter Beachtung des Abstraktionsgrades der Modellbildung mit dem Mehrkörpersystem werden technisch umsetzbare Wirkprinzipien und Konstruktionslösungen herausgearbeitet.

2. Biomimetische Roboter basierend auf undulatorischer Lokomotion

2.1 Pedale und apedale Lokomotion

Bei der Entwicklung von Bewegungssystemen für die Lokomotion nach biologischem Vorbild dominieren gegenwärtig die Laufmaschinen, d.h. die **pedale** Fortbewegung. Die bekannten Lösungen für "Walking Machines" reichen von Unikaten für die Grundlagenforschung bis zu in Serie gefertigten kommerziellen Lösungen. Von bipedalen bis oktopedalen Konstruktionen sind alle biologischen Vorbilder von Ingenieuren umgesetzt worden [1]. Die mathematisch-mechanische Grundlage für den Entwurf und die Dimensionierung solcher Strukturen bilden Mehrkörpersysteme (MKS). Die Laufmaschinen sind überwiegend aus rigiden Strukturen gefertigt, wie das Beispiel der Laufmaschine KATARINA (Fraunhofer Institut für Fabrikbetrieb und –automatisierung Magdeburg) exemplarisch zeigt. Deshalb erfüllt das MKS die Hauptforderung an das mechanische Modell - Adäquatheit zum realen System.

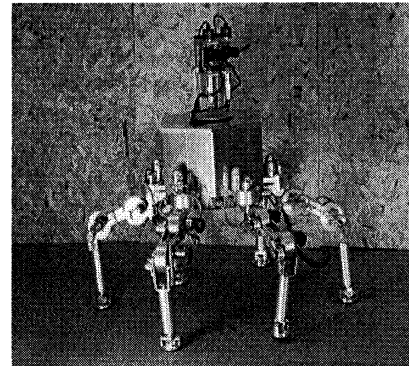


Abb. 1: Sechsheinige Laufmaschine KATARINA [2]

Apedale Lokomotionsformen besitzen in der Inspektionstechnik Vorteile bzw. erscheinen in der Medizintechnik für Diagnosesysteme und minimal-invasive Chirurgie die einzig mögliche Bewegungsform. Diese Anwendungsfelder für autonome mobile Roboter stellen neue Anforderungen bezüglich Baugröße, Antriebssystem und dem Funktionsprinzip allgemein. Durch die rasante Entwicklung auf dem Gebiet der Mikrosystemtechnik, durch neue Werkstoffe und Fertigungstechnologien wird es möglich, die von Ingenieuren bisher weniger untersuchte Lokomotion von Würmern und Schlangen für Anwendungen auf den genannten Gebieten technisch umzusetzen. Für die Bewegungsübertragung werden nicht mehr nur die klassischen form- oder kraftgepaarten Gelenke eingesetzt. Zunehmend finden stoffschlüssige gelenkige Verbindungen Anwendung. Mechanismen mit nachgiebigen Elementen beziehen ihre Beweglichkeit mehr aus der Nachgiebigkeit ihrer Glieder als aus Starrkörpergelenken [3]. Elastische Deformationen, die in der Mechanik bisher vorwiegend als Störungen betrachtet wurden, sind funktionsbestimmend für das Bewegungssystem und sollen deshalb gezielt gesteuert werden.

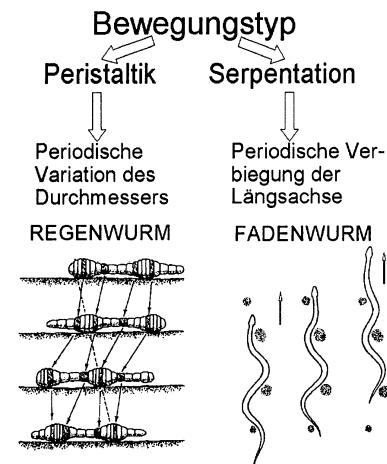


Abb. 2: Apedale Lokomotion

2.2 Undulatorische Lokomotion

Die Beschreibung der Bewegung durch Peristaltik (Würmer) und Serpensation (Schlangen, Abb. 2) führt in der Modellbildung dabei nicht zwangsläufig zum deformierbaren Kontinuum [4]. Aus Sicht der Mechanik lassen sich diese Fortbewegungsformen als **undulatorische Lokomotion** nach MURRAY [5] klassifizieren. Diese Bewegung bedingt prinzipielle Nicht-Holonomie der Systeme. Große Klassen derartiger Systeme sind mit klassischen Methoden der analytischen Mechanik nichtholonome Systeme erfaßbar. Zugehörige Steuerungsaufgaben (besonders das Finden von „gaits“ für optimale Lokomotion) werden aktuell weltweit in der Nicht-linearen Kontrolltheorie bearbeitet [6], [7], [8]. Als Modell erweist sich erneut das MKS als effi-

zienter Ansatz zur Analyse und Synthese der Bewegung. Das Prinzip der Undulation, d.h. die Auskopplung periodischer interner Deformationen durch Interaktion mit der Umgebung zu einer monotonen Fortbewegung ist zum Beispiel zahlreich bei Inch-Worm-Systemen umgesetzt worden.

2.3 Non-holonomic Mobile Robot

Die nichtholonomen Zwangsbedingungen am Rad (no-side-slip conditions) bilden die mechanische Grundlage für das in Abbildung 3 dargestellte Bewegungssystem von STEIGENBERGER u.a. [9]. Das System ermöglicht je nach Kontaktpunkten (jeweils ein Gelenkpunkt und eine Radpaarung) zum Boden eine Bewegung in x- bzw. y-Richtung. Dabei verfügt es nur über ein Antriebselement (Pneumatikzylinder) für die periodische Steuerung der internen Gestaltänderungen des Systems, die durch „shape variables“ beschrieben werden kann. Zur Optimierung der Strukturparameter wird eine Simulation des dynamischen Verhaltens mit dem System ALASKA durchgeführt.

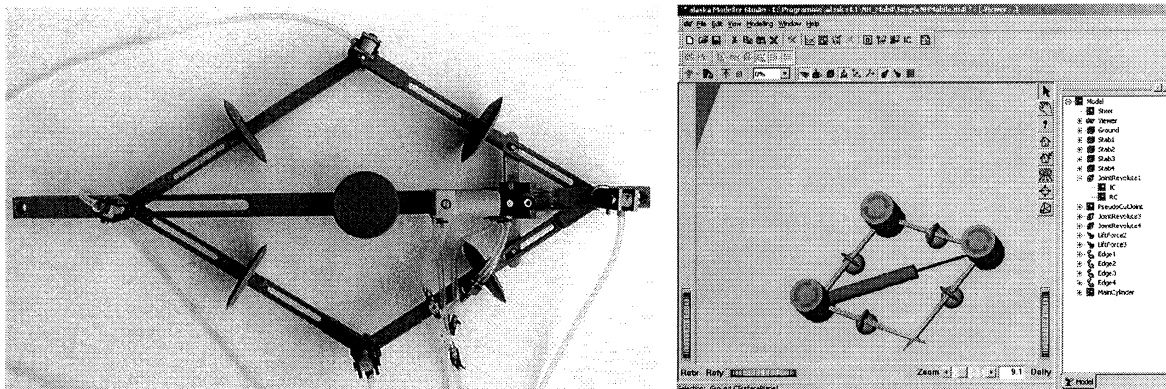


Abb. 3: Non-holonomic mobile robot (Prototyp links, Simulation in ALASKA 4.1 rechts)

2.4 Wurmsonde

Von RIEMER [10] wurde eine Wurmsonde vorgestellt (Abb. 4), deren Fortbewegung auf unterschiedlichen Haft- und Gleitreibungskräften bei bewegten und stehenden Wurmsegmenten basiert. Als Antrieb werden SMA-Drähte als Federn gewickelt eingesetzt.

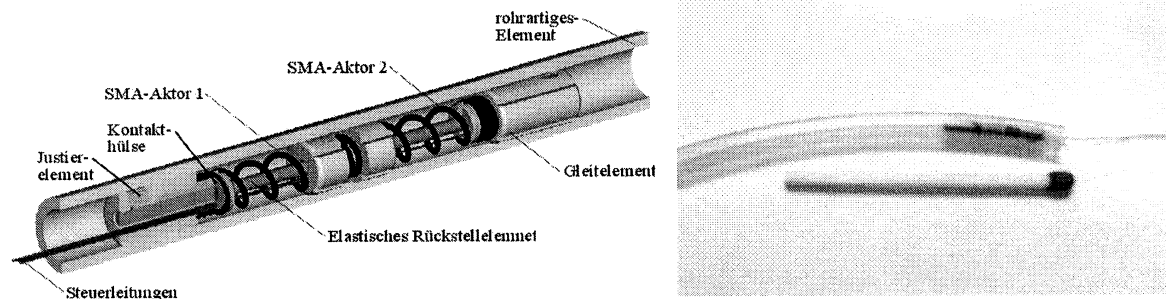


Abb. 4: Wurmsonde mit SMA-Antrieb (Struktur links, Prototyp rechts)

Wie der Größenvergleich in der Abbildung 4 zeigt, ermöglichen die Technologien der Mikrosystemtechnik eine technische Realisierung in einer Baugröße, die Anwendungen in der minimal-invasiven Chirurgie möglich erscheinen läßt. In der Abbildung 5 ist die Computersimulation der Bewegung basierend auf einem Feder-Masse-Modell mit eingepprägten Kräften als Antrieb dargestellt.

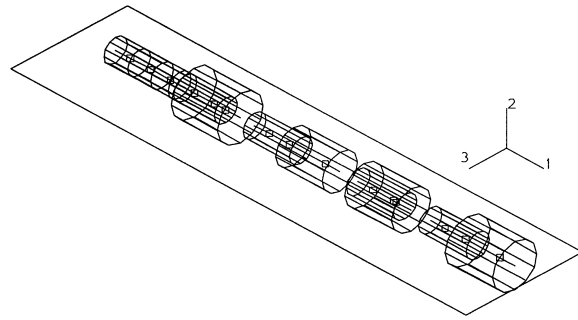


Abb. 5: Computersimulation der Wurmsonde

2.5 Lokomotionssystem mit Unwuchterregung

Die Grundprinzipien der Bewegungsgenerierung durch Undulation und nichtsymmetrische Reibung bilden die Vortriebsfaktoren für das Lokomotionssystem in der Abbildung 6. Der Antrieb erfolgt elektromechanisch über ein Unwuchtsystem [11]. Die Dimensionierung der Systemparameter des positiv getesteten Prototyps erfolgte mit einer Simulation in ALASKA (Abb. 7).

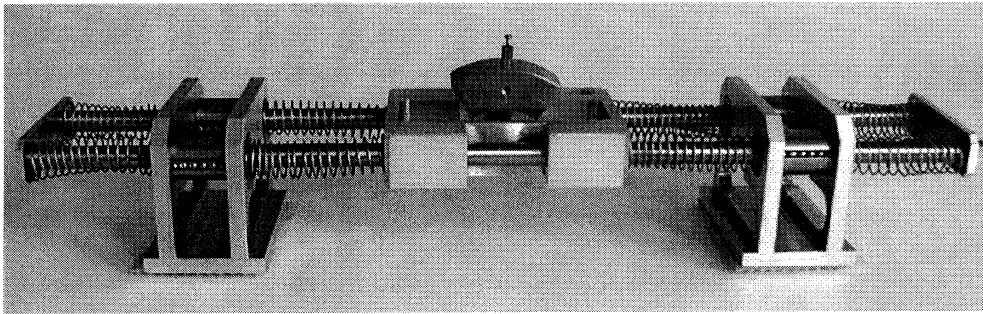


Abb. 6: Lokomotionssystem mit Unwuchterregung

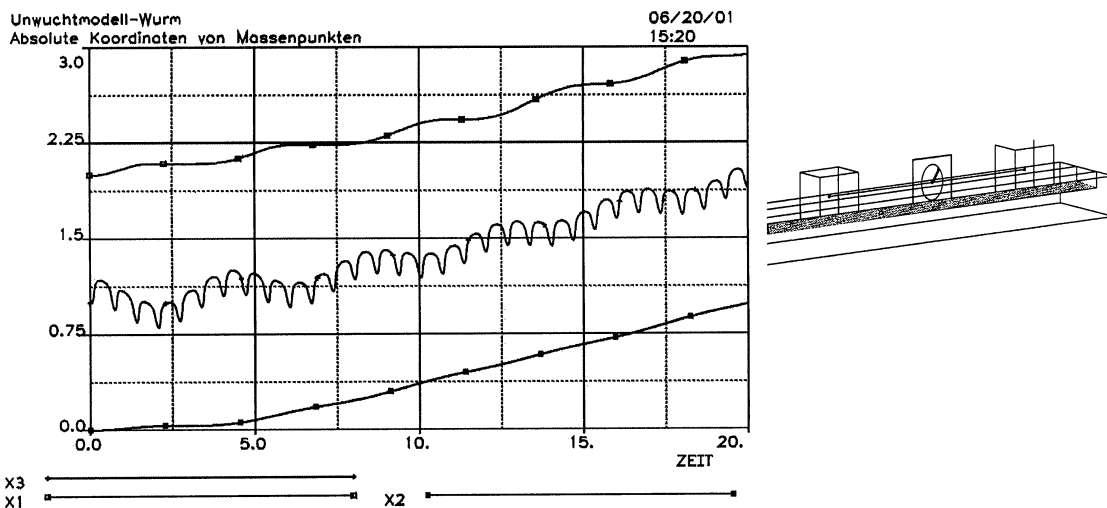


Abb. 7: Simulation der Bewegung (x1,x2-Bewegung der Gleitelemente mit Borsten, x3-Bewegung des Unwuchtträgers)

3. Muskelmodell für isometrische Kontraktion

3.1 Muskelmodell nach HILL

Im Zusammenhang mit der Entwicklung biometrischer Bewegungssysteme ist vor allem das biologische Antriebssystem „Muskel“ weltweit aktueller Untersuchungsgegenstand. Im Bereich der technischen Umsetzung existieren unterschiedlichste Ansätze in der Mikro- und Makrotechnik. Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen ist die dynamische Analyse eines Roboterarms mit dem Freiheitsgrad zwei (Abb. 8), dessen Aktoren (nach dem Prinzip Agonist/Antagonist wirkend) eine Charakteristik gemäß der HILLschen Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie (Abb. 9) des Muskels aufweisen. Die Muskelkraftbeziehung

$$f_m(t) = e(t) f_H(v_m(t))$$

aus [12] wurde verwendet, um Antriebe mit muskelähnlichen Aktuatoren zu modellieren. $e(.)$ wird als Steuerung aufgefaßt. Die Funktion $f_H(.)$ beschreibt die HILLsche Kraft-Geschwindigkeits-Relation, die mit Hyperbelstücken approximiert wird:

$$f_H(v_m) := \begin{cases} f_{Hk}(v_m) = \frac{c_0}{v_m(t) + b_0} - a_0 & \forall v_m(t) \geq 0 \\ f_{He}(v_m) = \frac{C_0}{v_m(t) - B_0} + A_0 & \forall v_m(t) < 0 \end{cases}$$

mit der Stetigkeitsbedingung $f_{Hk}(0) = f_{He}(0)$.

Nachfolgend gelten folgende Beziehungen zwischen den Bezeichnungen in [12] und der analytischen Mechanik folgenden Symbolik in dieser Arbeit:

$v_j(t)$ = Steuerung des j-ten Muskels $\leftrightarrow e(t)$,

$\dot{q}(t)$ = Geschwindigkeit $\leftrightarrow v_m(t)$,

$h_j(\dot{q})$ = HILL-Kurve des j-ten Muskels $\leftrightarrow f_H(v_m)$.

Pro Gelenk werden zum Antrieb des Roboterarms zwei Muskeln eingesetzt. Alle diese Muskeln genügen dem geforderten Funktionsverlauf, d.h. der HILLschen Kraft-Geschwindigkeits-Relation.

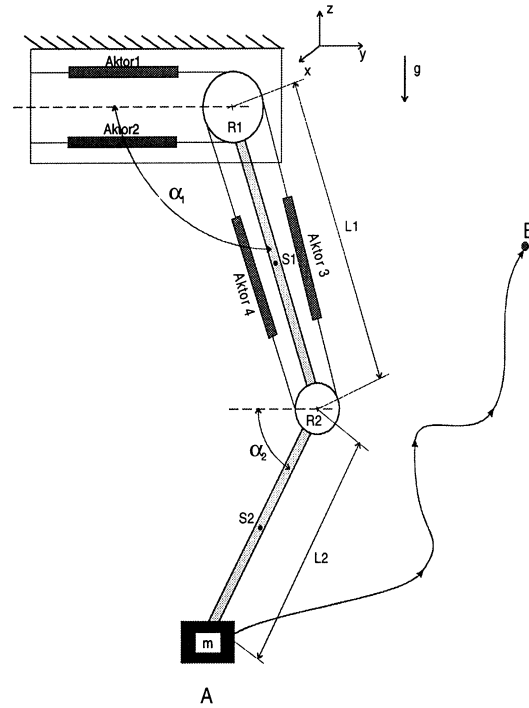


Abb. 8: Roboterarm mit muskelähnlichem Antrieb

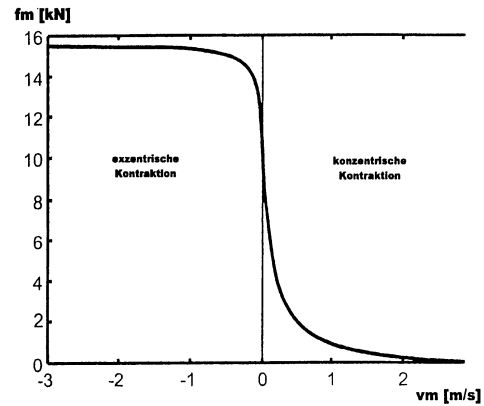


Abb. 9: Muskel-Kennlinie nach HILL [12]

Für die Aktivierungsfunktionen gilt: $v_j \in [0,1]$, d.h. der j-te Muskel arbeitet im Arbeitsbereich von Null bis maximaler Muskelkraft. v_j bestimmt somit die Intensität des j-ten Muskels. Eine analytisch geschlossene Approximation für die HILLSche Funktion ist die Approximation durch den $\arctan(\cdot)$:

$$h_j(\cdot) = a_j^* - b_j^* \arctan(\cdot), a_j^*, b_j^* \in R^+, j = 1 \dots 4.$$

Die Gesamtsteuerung des Gelenkwinkels q_1 zeigt Abbildung 10. Die Steuerung u_1 muß in dem Streifen S , begrenzt durch die beiden Funktionen $h_1(\dot{q}_1)$ und $-h_2(-\dot{q}_1)$, liegen, da $0 \leq v_j \leq 1, j = 1 \dots 2$ ist. Für q_2 gilt Analoges.

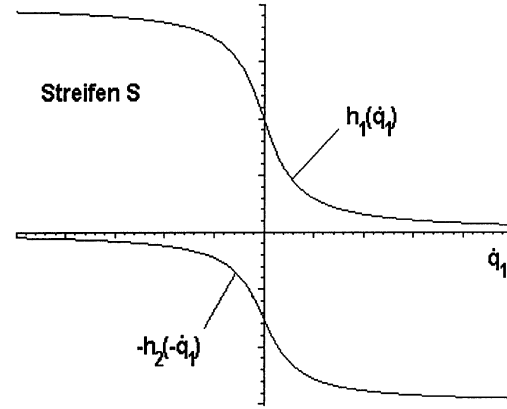


Abb. 10: Zulässiger Bereich S für die Steuerungen

3.2 Simulation der Bewegung eines Roboterarmes

Für das formulierte Steuersystem des Roboterarmes in der Form

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u$$

der Dimension $n = 2$ wurde eine Stabilitätsaufgabe gelöst. Dabei wurde die Steuerung u als Überlagerung der jeweils beiden Muskelkräfte realisiert:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(h_1(\dot{q}_1)v_1, h_2(\dot{q}_1)v_2) = h_1(\dot{q}_1)v_1 - h_2(-\dot{q}_1)v_2, \\ u_2 &= u_2(h_3(\dot{q}_2)v_3, h_4(\dot{q}_2)v_4) = h_3(\dot{q}_2)v_3 - h_4(-\dot{q}_2)v_4, \end{aligned}$$

mit der Zusatzvorschrift: $v_1 v_2 = 0$ bzw. $v_3 v_4 = 0$.

Das Problem der Lösbarkeit der Stabilitätsaufgaben besteht darin, daß aufgrund der beschränkten Steuerungen v_j nicht beliebige Stabilitätsprobleme gelöst werden können. Eine Anpassung der Systemparameter der Muskeln an das Bewegungssystem ist nötig. Es wurde eine Abschätzung für die untere Schranke für den maximalen Wert der Steuerung u_i in Abhängigkeit der potentiellen Energie formuliert [13]. Die Abbildungen 11- 16 zeigen die Wirkung der gefundenen Steuerungen u_i bei der Stabilisierung der Position $(q_1, q_2) = (\pi, 0)$ aus der Anfangsposition $(q_1(0), q_2(0)) = (1.0, 1.0)$. Folgende Parameter wurden gewählt:

Roboterarm:	$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$	$r_1 = r_2 = 1 \text{ m}$ (Schwerpunktlagen)
	$l_1 = l_2 = 2 \text{ m}$	$J_1 = J_2 = 1 \text{ kgm}^2$
Muskelparameter:	$a_j^* = 110, j = 1 \dots 4$	$b_j^* = \frac{2a_j^*}{\pi}, j = 1 \dots 4$
Anfangslagen:	$(q_1(0), q_2(0)) = (1.0; 1.0) \text{ in rad}$ $(\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)) = (0; 0)$	
Stabilitätsfaktoren des P-Feedbacks:	$k_{1i} = 1, i = 1 \dots 2$	$k_{2i} = 1, i = 1 \dots 2$

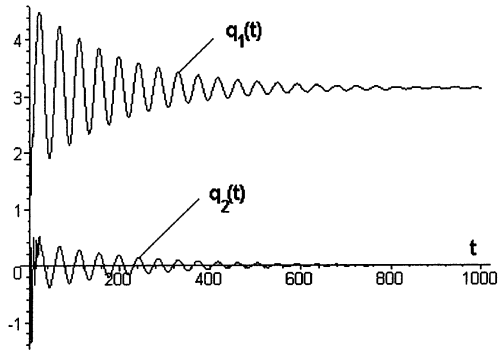


Abb. 11: Verallgemeinerte Koordinaten

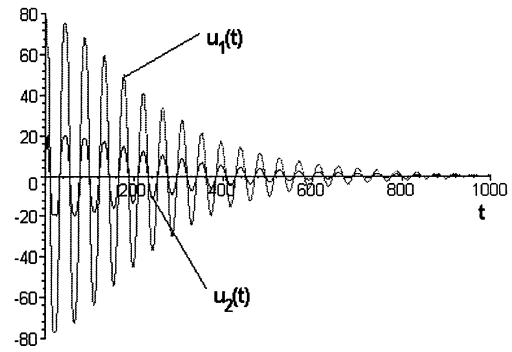


Abb. 12: Steuerungen u_i

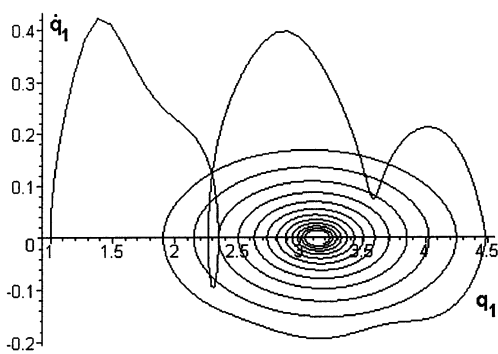


Abb. 13: Phasenkurve 1

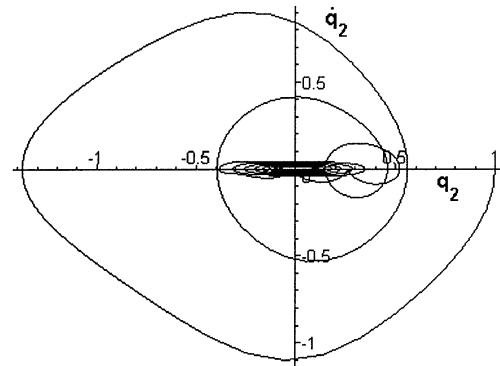


Abb. 14: Phasenkurve 2

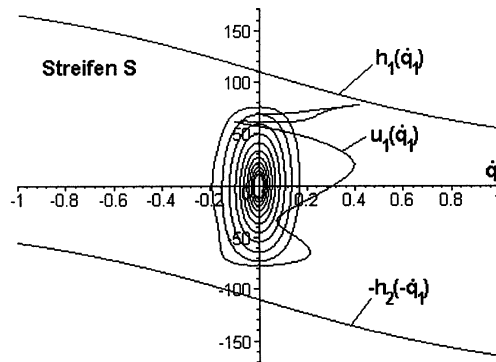


Abb. 15: zulässiger Streifen für u_1

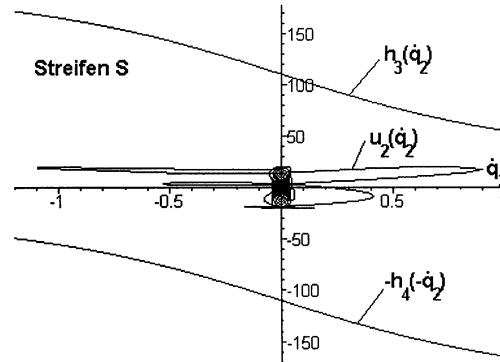


Abb. 16: zulässiger Streifen für u_2

Mit Hilfe von Modellen auf Basis von geregelten Mehrkörpersystemen, gelingt es über dera-
tig einfache Strukturen hinaus geeignete Simulationsmodelle zu erstellen und diese mittels
Analyse-Programmen hinsichtlich ihrer dynamischen Eigenschaften zu untersuchen [14].

3.3 Experimentelle Untersuchungen

Für die Bewegungsanalyse von kinematischen Strukturen (einfaches Pendel, Doppelpendel) mit muskelähnlichen Aktoren wurde zuerst ein Kniestrecker-Modell, bestehend aus einem Drehgelenk (Knie) und einem Segment (Bein), erstellt, das sich für eine Simulation einer dynamischen Streckbewegung um 90° eignet. Dazu wurde als Ersatz für den Quadrizeps-Muskel eine Antriebsfunktion im Gelenk eingepreßt. Diese weist eine Kraft-Geschwindigkeit-Charakteristik nach HILL auf. Die Kniestreckung erfolgte bei maximaler Kraft (100% Aktivierung), abhängig von der physiologischen Querschnittsfläche des Ersatzmuskels und bei Annahmen unterschiedlicher Muskellängen, in Anlehnung an Untersuchungen von NIGG [15]. Ergebnisse dieser Simulation sind Muskelkraft-Zeit- und Gelenkwinkel-Zeit-Verläufe, die auch Rückschlüsse hinsichtlich der Erzeugung zeitoptimaler Bewegungen von Manipulatoren in der Robotik erlauben.

Weitere Untersuchungen zielten auf Simulationen insbesondere von Eigenschaften natürlicher Bewegungssysteme wie die Anpassungsfähigkeit an verschiedene Lastfälle, die Variation von Steifigkeit und Dämpfung sowie die Erzeugung feinfühler Bewegungen. Dazu wurde mittels ALASKA 4.1 ein Zweimassen-Modell (Doppelpendel) erstellt und typische Kennlinien des McKibben-Muskels nach TONDU [16] eingepreßt. Das parametrisierte Modell (Abb. 8) ist so gestaltet, dass zur Bewegungserzeugung an bzw. um zwei Drehgelenken jeweils zwei pneumatische Aktuatoren befestigt sind. Diese bilden paarweise ein System aus Agonist und Antagonist. Durch gleichzeitige Koaktivierung des zweiten Aktors und damit veränderbare Gelenksteifigkeit soll der Arm feinfühler Bewegungen ausführen können. Bei nachfolgenden Forschungsarbeiten ist der Einbau von steuerbaren Dämpfungskomponenten in die Struktur vorgesehen. Damit lässt sich die Dämpfung des Gesamtsystems gezielt einstellen, um z.B. ein Überspringen des Arms zu vermeiden. Neben der Ermittlung optimaler Befestigungspunkte (Ursprungs- und Ansatzpunkte) an Glieder und Gelenken für bestimmte Last- und Bewegungsfälle wurden Simulationen zur Erzeugung zeit- und energieoptimaler Bewegungen, sowie bei Vorgabe einer Bewegung Untersuchungen zur Bahngenauigkeit durchgeführt.

4. Literatur

- [1] http://www.fzi.de/ipt/WMC/walking_machines_katalog/walking_machines_katalog.html
- [2] http://www1.iff.fhg.de/iff/aut/english/start_katharina_e.html
- [3] **Bögelsack, G.:** Nachgiebige Mechanismen in miniaturisierten Bewegungssystemen. Proc. 9th World Congr. on Theory of Machines and Mechanisms, Milano, 1995, Vol. 4, pp. 3101-3104
- [4] **Zeidis, I.; Zimmermann, K.:** Ein mathematisches Modell für peristaltische Bewegung als Grundlage für das Design wurmartiger Mikroroboter. Technische Mechanik 20 (2000) 1, S. 73-80
- [5] **Ostrowski, J.P.; Burdick, J.W.; Lewis, A.D.; Murray, R.M.:** The Mechanics of Undulatory Locomotion: the Mixed Kinematic and Dynamic Case. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1995
- [6] **Ostrowski, J.P.; Burdick, J.W.:** Gait kinematics for a serpentine robot. IEEE Int. Conf. on Rob. Autom. 1996
- [7] **van der Schaft, A.J.; Schumacher, J.M.:** Complementarity modeling of hybrid systems. CWI Rep. BS-R9611, 1996, 23 pp.
- [8] **Jiang, Z.-P.; Nijmeijer, H.:** Backstepping-based tracking control of nonholonomic chained systems. Proc. 4th Europ. Contr. Conf., Brussels, July 1-4, 1997, Vol. 3, TH-M-A2, 6 pp.
- [9] **Steigenberger, J.; Zimmermann, K.; Walkling, P.; Preuß, R.:** Mobil zur Bewegungserzeugung durch Ausnutzung nichtholonomer Zwangsbedingungen. DE 100 16 038 A1, Deutsches Patentamt München, 2001
- [10] **Riemer, D.:** Linearantrieb nach biologischem Vorbild, DE 199 50 271 A1, Deutsches Patentamt München, 1999

- [11] **Zimmermann, K.; Zeidis, I.; Steigenberger, J.; Huang Jianjun:** An approach to the modelling of worm-like motion systems with finite degree of freedom – First steps in technical realization. CLA-WAR 2001, 24-26 Sept. Karlsruhe
- [12] **Wagner, H.; Blickhan, R.:** Stabilising function of skeletal muscles: an analytical investigation. J. theor. Biol. 1999, pp.163-179
- [13] **Behn, C.:** Steueraufgaben für Zwei-Arm-Roboter mit muskelähnlichen Aktuatoren. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 2001
- [14] **Gerlach, E.:** Simulation von geregelten Mehrkörpersystemen in Forschung und Lehre, SIM 2000, Dresdner Tagung, Simulation im Maschinenbau-Softwaretools und Anwendungen in Lehre, Forschung und Praxis, S. 607-614, ISBN 3-86005-244-6, Dresden, Februar 24-25, 2000
- [15] **Nigg, B.N.; Herzog, W.:** Biomechanics of the musculo-skeletal system. John Wiley & Son Chichester New York 1999
- [16] **Tondu, B.:** Analysis and modeling of the dynamic behaviour of the McKibben artificial muscle. Proc. of the 5th International Federation of Automatic Control symposium (IFAC), Robot Control (SYROCO '97) 1997
- [17] **Bögelsack, G.; Schilling, C.:** Terminologie zur Biomechanik der Bewegung. TU Ilmenau, 2001

Modelling of Electrical Systems with Piecewise-Linear Characteristics by Means of the Linear Complementarity Principle

Modellierung von elektrischen Systemen mit stückweise linearen Kennlinien mittels Linearem Komplementaritätsprinzip

Olaf Enge, Peter Maißer

Institut für Mechatronik an der Technischen Universität Chemnitz,

Reichenhainer Straße 88, 09126 Chemnitz, Germany

Tel: +49(0)371/531-4684, Fax: +49(0)371/531-4669,

E-mail: o.enge@ifm.tu-chemnitz.de

Abstract. In this paper, the usage of the Linear Complementarity Problem (LCP) for modelling electrical systems containing components with switching characteristics is shown. Using such components, other resistors with a piecewise-linear characteristic can be emulated, too.

Starting point is a method for modelling electromechanical systems (EMS) based on the Lagrange formalism. A unified mathematical theory is used to represent such systems taking into account all interactions between the physically heterogeneous substructures. Applying the LCP, it is possible to include switching components into this theory and, this way, to extend the class of EMS which can be covered.

Der Beitrag erläutert die Anwendung des Linearen Komplementaritätsproblems (LCP) zur Modellierung von elektrischen Systemen, die Bauelemente mit Schaltverhalten enthalten. Unter Verwendung solcher Bauelemente können auch andere Resistoren, die eine stückweise lineare Kennlinie aufweisen, nachgebildet werden.

Ausgangspunkt ist eine auf dem Lagrange-Formalismus basierende Methode zur Modellierung von elektromechanischen Systemen (EMS). Mittels einer einheitlichen mathematischen Theorie werden solche Systeme unter Beachtung aller Wechselwirkungen zwischen den physikalisch heterogenen Substrukturen abgebildet. Die Anwendung des LCP ermöglicht eine Einbeziehung von Schalter-Bauelementen in diese Theorie und damit eine Erweiterung der erfassbaren Klasse von EMS.

1 Introduction

For analysis and synthesis of electromechanical systems (EMS), a unique mathematical modelling approach should be used. Such an approach for discrete EMS with electrically linear constitutive equations was already presented (e.g. [1, 5]). In this paper, a method is explained to use this approach for systems with variable structure, too. Such systems are known from power electronics (see e.g. [3]) or microsystem technology (good summary in [6]). Mechanical systems with variable structure in general are considered in [2] applying the LCP among others.

In this paper, it will mainly be focused on electrical switches which are controlled by electrical state variables (e.g. in diodes) but the approach can be applied to time-controlled switches, too.

The modelling of EMS with switches in its electrical subsystem is presented using a Lagrange-based formalism and the LCP. The mechanical subsystem is assumed to have a fixed structure. For modelling non-linear resistive components, an appropriate approximation by piecewise-linear characteristics is suggested. For such components, equivalent circuits containing voltage sources, ideal diodes and linear resistors can be used. Finally, some simulation results for circuits with ideal diodes are given.

Unless otherwise declared, tensor notation and the corresponding summation convention is used. Additionally, let denote $\partial_a = \frac{\partial}{\partial q^a}$, $\dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}$ etc.

2 Modelling of Electromechanical Systems

A concept of the application of the Lagrange formalism for modelling EMS was already presented very detailed in [1] and also in [5]. Here, only a short summary is given.

2.1 Lagrange's Equations for Electrical Systems

The electrical system (ES) can be represented by a network of abstract 2-poles with a corresponding network graph Γ . Let G denote a frame of Γ and $H(G)$ the coframe of G in Γ . The corresponding fundamental loop matrix is denoted by A . Then Kirchhoff's current law yields that each branch charge \bar{q}^j (or current $\dot{\bar{q}}^j$) can be represented by a linear combination of coframe charges q^μ (or currents \dot{q}^μ):

$$\bar{q}^j = A^j_{\mu} q^\mu, \quad \dot{\bar{q}}^j = A^j_{\mu} \dot{q}^\mu, \quad j \in \Gamma, \mu \in H(G). \quad (1)$$

Due to (1), the frame must not contain any current generators. Consequently, all current generators belong to the coframe $H(G)$ and decompose the index set

$$\begin{aligned} H(G) &= H^* \cup H_0, \\ H^* &: \text{coframe branches not containing current generators,} \\ H_0 &: \text{coframe branches containing current generators.} \end{aligned} \quad (2)$$

Equ. (1) with (2) then yields

$$\bar{q}^j = A^j_{\mu} q^\mu + q_0^j(t), \quad q_0^j := A^j_{\mu_0} \bar{q}^{\mu_0}, \quad j \in \Gamma, \mu \in H^*, \mu_0 \in H_0. \quad (3)$$

The set of all branch charges $\{\bar{q}^j, j \in \Gamma\}$ is called a configuration of the ES. Analogously to mechanical systems ([4]), the motion of the ES can be regarded as the motion of its representing point $q = (q^\mu)$ in its configuration space \mathbb{R}^m ($m := |H^*|$). Applying the principle of virtual work, Lagrange's motion equations can finally be formulated:

$$(\dot{\partial}_\mu \Lambda) - \partial_\mu \Lambda + \dot{\partial}_\mu D = 0 \quad (4)$$

with the Lagrangian $\Lambda := W'_m - W_e - V^h$ (W'_m – magnetic coenergy, W_e – electrical energy, V^h – generalized potential) and the dissipation function D .

2.2 Lagrange's Equations for Electromechanical Systems

The kinematics of the EMS is defined by geometric constraints between the rigid bodies and the topology of the electrical network represented by abstract 2-poles. All branch charges \bar{q}^i and mechanical coordinates \bar{x}_k^s , which satisfy all constraints of the EMS at given time t , determine the set

$$\mathfrak{L}_t := \left\{ \bar{x}_k^s, \bar{q}^i \mid \bar{x}_k^s = \bar{x}_k^s(q^\kappa, t), \bar{q}^i = A^i_\mu q^\mu + q_0^i(t); \begin{matrix} s = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, K; i \in \Gamma; \\ (q^\kappa, q^\mu) \in \mathbb{R}^{n+m}, \kappa \in J, \mu \in H^* \end{matrix} \right\} \quad (5)$$

of all admissible configurations of the EMS at time t (K – number of bodies in the mechanical subsystem, J – index set of generalized mechanical coordinates, $n := |J|$). In the following, $\kappa, \lambda, \varrho, \sigma \in J$; $\mu, \nu, \omega \in H^*$; $a, b \in J \cup H^*$; $\alpha, \beta \in J \cup H^* \cup \{0\}$; and $q^0 = t$, $\dot{q}^0 = 1$ is assumed. $n + m$ is called quasi degree of freedom of the EMS; $q = (q^a) = (q^\kappa, q^\mu)$ denotes its representing point. The mechanical coordinates q^κ and the mesh charges q^μ are the generalized coordinates of the EMS.

The kinetics of EMS is based on the principle of virtual work in Lagrange's notation. The equations of motion finally read

$$(\dot{\partial}_a \Lambda)^\cdot - \partial_a \Lambda + \dot{\partial}_a D = Q_a^{(S)}, \quad a \in J \cup H^*, \quad (6)$$

$$\Lambda := T(\dot{q}^\lambda, q^\lambda, t) + \Psi(\dot{q}^\nu, q^a, t) - V(\dot{q}^a, q^a, t) \quad (7)$$

(Λ – Lagrangian, Ψ – magnetomechanical copotential, V – generalized electromechanical potential, D – dissipation function), where $Q_a^{(S)}$ denotes generalized forces which cannot or should not be represented by the state functions Ψ , V and D .

The constitutive equations of the electrical subsystem are assumed to be electrically linear. Let they be given in the explicit form

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0} \quad (8)$$

with

$$\begin{aligned} V_i^{(L)} &= \dot{\Psi}_i, & \Psi_i &= L_{ij}(\bar{x}, t) \dot{q}^j + \Psi_{i0}(\bar{x}, t), & L_{ij} &= L_{ji}, \\ V_i^{(R)} &= R_{ij}(\bar{x}, t) \dot{q}^j, & R_{[ij]} &= \text{const.}, \\ V_i^{(C)} &= C_{ij}(\bar{x}, t) \bar{q}^j + C_{i0}(\bar{x}, t), & C_{ij} &= C_{ji}, \\ V_{i0} &= V_{i0}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

(\bar{x} – mechanical coordinates). Then, the two state functions $\Lambda = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ and $D = \frac{1}{2} s_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ are quadratic in \dot{q} and with $\Gamma_{\alpha\alpha\beta} := (\partial_\alpha g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\alpha} - \partial_\alpha g_{\alpha\beta})/2$, the Lagrange equations (6) read in explicit form

$$g_{ab}(q, t) \ddot{q}^b + \Gamma_{\alpha\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + s_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = 0, \quad (10)$$

where $(g_{ab}) = (g_{\kappa\lambda}) \oplus (g_{\mu\nu})$. Assuming $g_{\mu\nu}$ is regular, g_{ab} is regular, too. Then, $g_{ab}(q, t)$ defines (in general) a time-dependent Riemannian metric in \mathbb{R}^{n+m} and Equ. (10) yields

$$g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t) \ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho - Q_\kappa^{mech}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) - Q_\kappa^{el}(q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t) = 0, \quad (11a)$$

$$l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) = 0, \quad (11b)$$

where

$$\begin{aligned}
l_{\mu\nu} &= A^i_{\mu} A^j_{\nu} L_{ij}(q^{\sigma}, t), \\
\tilde{r}_{\mu\nu} &= \partial_{\kappa} l_{\mu\nu} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 l_{\mu\nu} + A^i_{\mu} A^j_{\nu} R_{ij}(q^{\sigma}, t), \\
c_{\mu\nu} &= A^i_{\mu} A^j_{\nu} C_{ij}(q^{\sigma}, t), \\
\tilde{v}_{\mu 0} &= \partial_{\kappa} \psi_{\mu 0} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 \psi_{\mu 0} + A^i_{\mu} [R_{ij} \dot{q}_0^j(t) + C_{ij} \dot{q}_0^j(t) + V_{i0}(t) + C_{i0}(q^{\sigma}, t)], \\
&\quad \text{with } \psi_{\mu 0} = A^i_{\mu} [L_{ij}(q^{\sigma}, t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(q^{\sigma}, t)].
\end{aligned} \tag{12}$$

3 The Linear Complementarity Problem

The LCP is well known in mathematical programming as a unifying description of a large class of problems, including e.g. linear and quadratic programming. Its fundamental form reads: Let be given a quadratic matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ and a vector $b \in \mathbb{R}^n$. Then find all solutions $x, y \in \mathbb{R}^n$ to the problem

$$y = Ax + b \quad \text{with} \tag{13a}$$

$$y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y^T x = 0. \tag{13b}$$

The non-negativity conditions in (13b) hold componentwise. Hence, $y^T x = 0$ is complied only if $y_i x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$. To get all solutions of an LCP, it is necessary to establish 2^n different linear systems of the form

$$C_k z_k = 0, \quad \text{with } z_k \geq 0, \quad k = 1 \dots 2^n, \tag{14}$$

where $z_k = (z_{k1} \dots z_{kn})^T$ is a vector the components of which are components of y or x ($z_i \in \{y_i, x_i\}, i = 1 \dots n$), and $C_k = (c_{k1} \dots c_{kn})$ is a matrix the columns of which comes from the identity matrix $E = (e_1 \dots e_n)$ or from $-A = -(a_1 \dots a_n)$ that means $c_i \in \{e_i, -a_i\}, i = 1 \dots n$. The complementary condition reads

$$\begin{aligned}
z_i &= y_i \iff c_i = e_i, \\
z_i &= x_i \iff c_i = -a_i.
\end{aligned}$$

The complete LCP may have no, exactly one, several or even an infinite number of solutions. But if A is a so-called P-matrix (all principle minors are strictly positive) then the LCP has exactly one unique solution independent of b . Note that each positive definite (PD) matrix is also a P-matrix.

4 LCP for switching diodes

4.1 Fundamentals

In electrical engineering, diodes are often considered as switches. Especially in power electronics, this simplification is justified in most cases. In Fig. 1, the characteristic curve of a switching diode is shown. The diode has two switching conditions: opened (conducting, no voltage drop) or closed (blocking, no current). According to Fig. 2, the

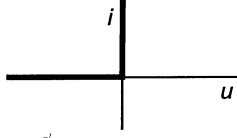


Figure 1: Characteristics of a switching diode

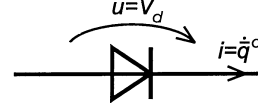


Figure 2: Circuit diagramme of a diode

complementary variables are the voltage drop $u = V_d$ across and the branch current $i = \dot{q}^d$ through the diode ($d \in \Gamma$). The complementary conditions read

$$V_d \leq 0, \quad \dot{q}^d \geq 0, \quad V_d \dot{q}^d = 0 \quad (\nexists! - \text{no summation}). \quad (15)$$

In the following, it is assumed that each branch contains not more than one diode. One way to include a switching diode into the Lagrange-based EMS-theory is to replace it either by a short circuit or by a (fictitious) current generator with the value 0. This method has the advantage that the branch is not needed to be eliminated from the network because the current generator acts like an insulation component in case of blocking diode. Hence, the **topology** of the electrical subsystem remains unchanged. Because the current generators of the electrical subsystem can be understood as kinematic constraints (in the sense of the kinematics of mechanical systems), only the **kinematics** of the electrical subsystem must be changed depending on the switching condition of the diode.

After modelling the kinematics for the diode, the criteria for the transition between the two switching conditions must be defined. If the diode is conducting, the current must remain positive. If, in a dynamic simulation, the current becomes 0 (or changes its sign) then the diode may switch. If the diode is blocking, the voltage drop must remain negative. If the voltage drop becomes 0 (or changes its sign) then the diode may switch, too. Hence, two indicator functions are necessary to monitor the transition criteria. This can be done by an integration code with a built-in rootfinder ([7]). If one of the criteria is fulfilled then the decision, if the diode switches or not, depends on the state of the complete electrical subsystem (possibly with more than one diode). Therefore, the integration must be stopped and an LCP must be created including the complementary variables of all diodes that may switch. The solution of the LCP determines for each diode if it will remain in the same working mode or will change to the other.

The LCP must also be established at the beginning of a dynamic simulation because the diode's working modes depend on the initial values of the generalized coordinates.

4.2 Complementary Conditions

To handle EMS with switching diodes in the electrical subsystem, some assumptions are necessary. Because of the diode's possible replacement by fictitious current generators, all branches containing diodes belong to the coframe of the electrical network. Then analogously to (2), the index set $H(G)$ can be decomposed into

$$H(G) = H^* \cup H_0 \cup H_D, \quad (16)$$

H^* : coframe branches not containing current generators,

H_0 : coframe branches containing current generators but no diodes,

H_D : coframe branches containing diodes.

The constitutive equations (8) of the electrical subsystem are completed by the voltages due to diodes ($V_d = V_i^{(D)}$, $d = i$) and read in their explicit form

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0} + V_i^{(D)}. \quad (17)$$

Because of the assumptions each fundamental loop contains not more than one diode. For each fundamental loop including a diode, Kirchhoff's voltage law yields a modified form of (11b)

$$l_{\delta\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\delta\nu}\dot{q}^\nu + c_{\delta\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\delta 0} = -v_\delta^{(D)}, \quad \delta \in H_D, \quad (18)$$

where $v_\delta^{(D)} = A_\delta^i V_i^{(D)} = \delta_\delta^i V_i^{(D)}$. According to (12), $\tilde{v}_{\mu 0} = \tilde{v}_{\mu 0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)$ includes (among others) all voltages due to the really appearing (not fictitious) current generators of the electrical network. Using the mesh quantities, the complementary conditions (15) read

$$-v_\delta^{(D)} \geq 0, \quad \dot{q}^\delta \geq 0, \quad v_\delta^{(D)}\dot{q}^\delta = 0 \quad (\mathbb{X}!), \quad \delta \in H_D. \quad (19)$$

Because of the two switching conditions of diodes, the index set H_D can be decomposed into two subsets

$$\begin{aligned} H_D &= H_D^* \cup H_{D0}, \\ H_D^* &: \text{fundamental loops with conducting diode,} \\ H_{D0} &: \text{fundamental loops with blocking diode,} \end{aligned} \quad (20)$$

where $H_D^* \cap H_{D0} = \emptyset$ and $|H_D^*| + |H_{D0}| = |H_D|$. Equ. (19) then reads with (20)

$$v_\delta^{(D)} = 0, \quad \dot{q}^\delta \geq 0, \quad \delta \in H_D^*, \quad (21a)$$

$$-v_\delta^{(D)} \geq 0, \quad \dot{q}^\delta = 0, \quad \delta \in H_{D0}. \quad (21b)$$

Each diode belongs either to H_D^* or to H_{D0} depending on its current switching condition at time t . If a diode switches then the cardinal number of one subset increases whereas the cardinal number of the other subset decreases. Note that a subset can even be an empty set occasionally.

In the motion equations of the electrical subsystem (11b), "acceleration" terms (\ddot{q}^ν) may appear. Therefore, the complementary conditions (21a, 21b) must finally be transformed from its "velocity" level to the "acceleration" level. First, a diode may only switch to the conducting mode if its current may increase from zero to positive values (at vanishing voltage drop). That means that the current's time derivative must be non-negative. Second, a diode may only switch to the blocking mode if its current retains equal to zero (the voltage drop may decrease from zero to negative values). That means that the current's time derivative must retain equal to zero, too. Hence, the complementary conditions in "acceleration" form are

$$v_\delta^{(D)} = 0, \quad \ddot{q}^\delta \geq 0, \quad \delta \in H_D^*, \quad (22a)$$

$$-v_\delta^{(D)} \geq 0, \quad \ddot{q}^\delta = 0, \quad \delta \in H_{D0}. \quad (22b)$$

4.3 Regular Matrix of Inductivities

If the matrix of inductivities L_{ij} is regular then $l_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu \in H$) is regular, too (even PD because magnetic coenergy is always positive). Combining Kirchhoff's voltage law for all H^* - and H_D -meshes, Equ. (11b) and (18) yield

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0} = -v_\mu^{(D)}, \quad \mu, \nu \in H^* \cup H_D, \quad (23)$$

where $v_\mu^{(D)} \equiv 0 \ \forall \mu \in H^*$. Equ. (23) can be used to create an appropriate equation system of the form (13a)

$$\begin{aligned} \ddot{q}^\nu &= -l^{\nu\mu} (\tilde{r}_{\mu\omega}\dot{q}^\omega + c_{\mu\omega}q^\omega + \tilde{v}_{\mu 0} + v_\mu^{(D)}) \\ &= -l^{\nu\mu} (q^\sigma, t) v_\mu^{(D)} + b^\nu (\dot{q}^\sigma, q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t), \end{aligned} \quad (24)$$

where all quantities except for \ddot{q}^ν and $v_\mu^{(D)}$ are known from time evolution. Let t_s denote the time at which at least one of the diodes must change its working mode and let $H_D^S(t_s)$ denote the set of all fundamental loops with diodes that are allowed to switch at time t_s . Then $H_D^S(t_s) \subseteq H_D$. Because of continuity reasons, each mesh with $\dot{q}^\delta = 0$ belongs to $H_D^S(t_s)$ and each mesh with $\dot{q}^\delta > 0$ does not belong to it. Note that this means simultaneously $v_\mu^{(D)} = 0 \ \forall \mu \in H_D \setminus H_D^S(t_s)$. Hence, Equ. (24) yields

$$\ddot{q}^\delta = -l^{\delta\varepsilon}v_\varepsilon^{(D)} + b^\delta, \quad \ddot{q}^\delta, -v_\delta^{(D)} \geq 0, \quad \ddot{q}^\delta v_\delta^{(D)} = 0 \ (\nexists!), \quad \forall \delta, \varepsilon \in H_D^S(t_s), \quad (25)$$

which represents an LCP with the complementary variables \ddot{q}^δ and $-v_\delta^{(D)}$. Because $l_{\mu\nu}$ in (23) is PD, the same holds for $l^{\delta\varepsilon}$ in (25). Hence, $l^{\delta\varepsilon}$ is a so-called P-matrix and the LCP has exactly one unique solution. This solution determines the new (kinematical) structure of the electrical subsystem beginning with the next integration step. The index set H_D is newly decomposed into H_D^* and H_{D0} according to (22a, 22b). In the case of $v_\delta^{(D)} = \ddot{q}^\delta = 0$ both subsets have equal rights. Then, an LCP must be created in the next integration step again to choose the correct structure of the electrical subsystem.

Finally, $\tilde{H}^* = H^* \cup H_D^*$ is the complete index set of generalized electrical coordinates. The motion equations (11b) have to be extended appropriately. The (fictitious) current generators yield no share to the branch voltages because $\dot{q}_0^\delta(t) \equiv 0 \ \forall \delta \in H_{D0}$. The indicator functions to be monitored are $\dot{q}^\delta \geq 0$, if $\delta \in H_D^*$, and $v_\delta^{(D)} \leq 0$, if $\delta \in H_{D0}$, where the currents are known from time evolution and the voltages can be determined using Kirchhoff's voltage law for the corresponding fundamental loops.

4.4 Irregular Matrix of Inductivities

In this section, the case of absence of inductors in some fundamental loops is considered. This leads to a permanent irregular matrix of inductivities. The case of time-depending singularities in the (L_{ij}) shall not be considered here.

The index sets H^* and H_D can then be decomposed into

$$H^* \cup H_D = H_L \cup H_R, \quad (26)$$

H_L : fundamental loops containing inductivities,

H_R : fundamental loops not containing inductivities (but resistors).

In the following, $\mu_L, \nu_L \in H_L$ and $\mu_R, \nu_R \in H_R$ is assumed. Then, $l_{\mu_R \nu} \equiv 0$ holds. Combining Kirchhoff's voltage law for the H^* - and H_D -meshes and respecting (26), Equ. (11b) and (18) yield ($\mu, \nu \in H^* \cup H_D$)

$$l_{\mu_L \nu_L} (q^\sigma, t) \dot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L \nu} (\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + c_{\mu_L \nu} (q^\sigma, t) q^\nu + \tilde{v}_{\mu_L 0} (\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) = -v_{\mu_L}^{(D)}, \quad (27a)$$

$$\tilde{r}_{\mu_R \nu} (\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + c_{\mu_R \nu} (q^\sigma, t) q^\nu + \tilde{v}_{\mu_R 0} (\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) = -v_{\mu_R}^{(D)}, \quad (27b)$$

where $v_\omega^{(D)} \equiv 0 \ \forall \omega \in H^*$ again. Because of the assumptions, $l_{\mu_L \nu_L}$ is regular (even PD). Let additionally be assumed, that $r_{\mu_R \nu_R}$ is regular, too. The other case shall not be considered here. Using $r_{\mu \nu} = A^i_\mu A^j_\nu R_{ij}(q^\sigma, t)$ (i.e. $\tilde{r}_{\mu_R \nu} = r_{\mu_R \nu}$), Equ. (27a, 27b) can be transformed into

$$l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} = -v_{\mu_L}^{(D)} - (\tilde{r}_{\mu_L \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_L \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_L 0}), \quad (28a)$$

$$r_{\mu_R \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} = -v_{\mu_R}^{(D)} - (r_{\mu_R \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_R \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_R 0}). \quad (28b)$$

Introducing two vectors $(g^\delta) = (\ddot{q}^{\nu_L}, \dot{q}^{\nu_R})^T$ and $(\lambda_\varepsilon) = (-v_{\mu_L}^{(D)}, -v_{\mu_R}^{(D)})^T$ as well as using

$$\begin{aligned} (A^{\delta\varepsilon}) &= \begin{pmatrix} (l_{\mu_L \nu_L}) & (r_{\mu_L \nu_R}) \\ (0) & (r_{\mu_R \nu_R}) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (l^{\nu_L \mu_L}) & (-l^{\nu_L \mu_L} r_{\mu_L \nu_R} r^{\nu_R \mu_R}) \\ (0) & (r^{\nu_R \mu_R}) \end{pmatrix}, \\ (b^\delta) &= -(A^{\delta\varepsilon}) \begin{pmatrix} (\tilde{r}_{\mu_L \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_L \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_L 0}) \\ (r_{\mu_R \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_R \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_R 0}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

an appropriate equation system of the form (13a) can be created

$$g^\delta = A^{\delta\varepsilon} \lambda_\varepsilon + b^\delta, \quad \delta, \varepsilon \in H_L \cup H_R, \quad (29)$$

where both $A^{\delta\varepsilon}$ and b^δ are known from time evolution. $H_D^S(t_s)$ depends on the index set decomposition (26). Considering fundamental loops with diodes and inductors $H_{DL} = H_D \cap H_L$, each mesh with $\dot{q}^\delta = 0$ belongs to the switching subset and each mesh with $\dot{q}^\delta > 0$ does not belong to it. Each fundamental loop including a diode but no inductors ($H_{DR} = H_D \cap H_R$) belongs to the switching subset. Then, $H_{DR} \subseteq H_D^S(t_s) \subseteq H_D$. Note that $v_\mu^{(D)} = 0$ holds for all meshes with diodes that must not switch at t_s ($\mu \in H_D \setminus H_D^S(t_s)$). Hence, Equ. (29) yields

$$g^\delta = A^{\delta\varepsilon} \lambda_\varepsilon + b^\delta, \quad g^\delta, \lambda_\delta \geq 0, \quad g^\delta \lambda_\delta = 0 \ (\nexists!), \quad \forall \delta, \varepsilon \in H_D^S(t_s), \quad (30)$$

which represents an LCP with the complementary variables g^δ and λ_δ . Because of the assumptions, $l^{\nu_L \mu_L}$ is PD. If $r_{\mu_R \nu_R}$ in (28b) is assumed to be PD (only dissipative resistors shall appear) then the same holds for $r^{\nu_R \mu_R}$. Therefore, $(l^{\nu_L \mu_L})$ and $(r^{\nu_R \mu_R})$ are P-matrices and consequently $(A^{\delta\varepsilon})$ is also a P-matrix. In this case, the LCP has exactly one unique solution which decomposes H_{DL} and H_{DR} according to (21a, 21b, 22a, 22b) into H_{DL}^* , H_{DL0} and H_{DR}^* , H_{DR0} , respectively.

Finally, $\tilde{H}^* = H^* \cup H_{DL}^* \cup H_{DR}^*$ is the complete index set of generalized electrical coordinates. The motion equations (11b) have to be extended appropriately. The (fictitious) current generators yield no share to the branch voltages because $\dot{q}_0^\delta(t) \equiv 0 \ \forall \delta \in H_{DL0} \cup H_{DR0}$. The indicator functions are $\dot{q}^\delta \geq 0$, if $\delta \in H_{DL}^* \cup H_{DR}^*$, and $v_\delta^{(D)} \leq 0$, if $\delta \in H_{DL0} \cup H_{DR0}$.

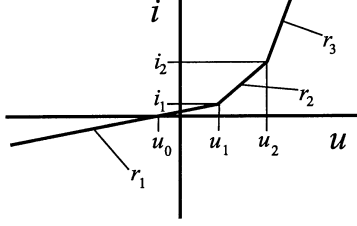


Figure 3: Piecewise-linear resistor

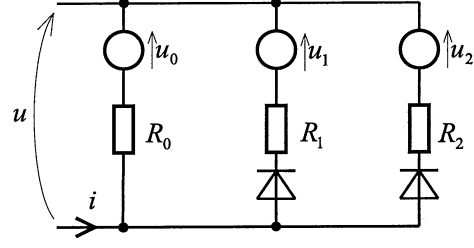


Figure 4: Equivalent circuit

5 Piecewise-Linear Resistors

Non-linear resistive components can appropriately be approximated in many cases by piecewise-linear characteristics like shown in Fig. 3. For such characteristics, equivalent circuits containing voltage sources, ideal diodes and linear resistors can be used. The only assumption to the characteristics is that the component can be considered as both current and voltage driven, i.e. it has a strictly monotonic characteristics. Fig. 4 depicts one of such equivalent circuits. It matches the characteristics in Fig. 3 if $R_0 = r_1$, $R_1 = r_1 r_2 / (r_1 - r_2)$ and $R_2 = r_2 r_3 / (r_2 - r_3)$ holds. Similar equivalent circuits can be found for other characteristics analogously. This way, a large class of non-linear resistive components can be handled with a unique Lagrange-based approach to EMS.

6 Results

6.1 Electromechanical Example

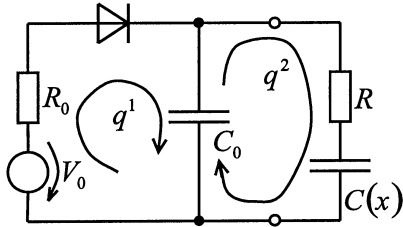


Figure 5: Circuit

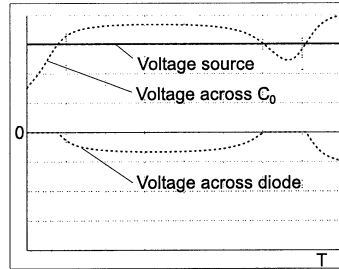


Figure 6: Voltages

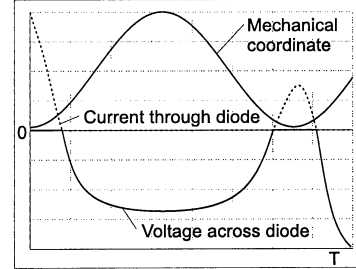


Figure 7: Diode's values

Fig. 5 shows a simple model of a one-way rectifier with a resistive-capacitive load. The load-capacitor has one moveable plate. Hence, its capacity depends on a mechanical coordinate. However, it shall not be elaborated on the mechanical subsystem here. The voltage law in both meshes yields $(1/\Delta C = 1/C_0 + 1/C(x))$

$$\begin{aligned} R_0 \dot{q}^1 + (q^1 - q^2) / C_0 - V_0 &= -v_1^{(D)}, \\ R \dot{q}^2 - q^1 / C_0 + q^2 / \Delta C &= 0. \end{aligned}$$

The LCP according to (30) reads

$$\dot{q}^1 = -v_1^{(D)} / R_0 - [(q^1 - q^2) / C_0 - V_0] / R_0.$$

The current working mode depends on the result of the LCP. The (electrical) motion equations for a conducting diode are

$$\begin{aligned} R_0 \dot{q}^1 + (q^1 - q^2) / C_0 - V_0 &= 0, \\ R \dot{q}^2 - q^1 / C_0 + q^2 / \Delta C &= 0 \end{aligned}$$

(indicator function: $\dot{q}^1 \geq 0$). A blocking diode leads to the one remaining equation

$$R \dot{q}^2 + q^2 / \Delta C = 0,$$

because $\dot{q}^1 = 0$ (indicator function: $v_1^{(D)} = V_0 - (q^1 - q^2) / C_0 \leq 0$).

The simulation results in Figs. 6 and 7 hold for a constant voltage source V_0 and a sinusoidal time evolution of the distance x between the load capacitor's plates. Altogether, the diode switches three times which is indicated in Fig. 7 by alternation from positive current through diode to negative voltage drop across diode or vice versa. If $C(x)$ would be constant and the initial voltages across the capacitors are less than V_0 then both capacitors would be charged until they reach V_0 and no switching of the diode would occur. Therefore, the switching between the working modes is only caused by the mechanical subsystem by changing the capacity $C(x)$.

6.2 Electrical Example

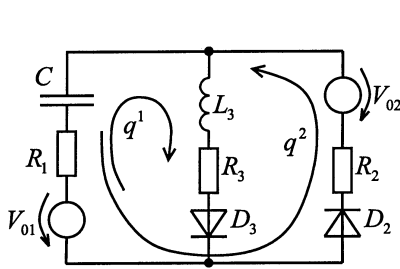


Figure 8: Circuit

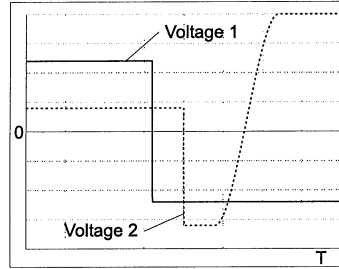


Figure 9: Simulation result

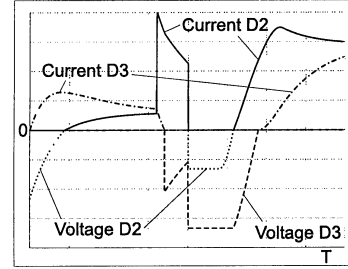


Figure 10: Simulation result

Fig. 8 shows an academic example which belongs to the class with irregular matrix of inductivities (see chapter 4.4). The voltage law in both meshes yields ($R_{12} = R_1 + R_2$)

$$\begin{aligned} L_3 \ddot{q}^1 + R_{13} \dot{q}^1 - R_1 \dot{q}^2 + (q^1 - q^2) / C - V_{01} &= -v_3^{(D)}, \\ -R_1 \dot{q}^1 + R_{12} \dot{q}^2 - (q^1 - q^2) / C + V_{01} - V_{02} &= -v_2^{(D)}. \end{aligned}$$

Using the mesh transformation (1), the complete LCP according to (30) reads ($\Delta R = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$)

$$\begin{aligned} \ddot{q}^2 &= \ddot{q}^2 = -v_2^{(D)} / R_{12} + [R_1 \dot{q}^1 + (q^1 - q^2) / C - V_{01} + V_{02}] / R_{12}, \\ \ddot{q}^3 &= \ddot{q}^1 = -\frac{1}{L_3} \left[\frac{R_1}{R_{12}} v_2^{(D)} + v_3^{(D)} \right] - \frac{1}{R_{12} L_3} \left[\Delta R \dot{q}^1 + \frac{R_2}{C} (q^1 - q^2) - R_2 V_{01} - R_1 V_{02} \right] \end{aligned}$$

with $\ddot{q}^2, \ddot{q}^3, -v_2^{(D)}, -v_3^{(D)} \geq 0$ and $\dot{q}^2 v_2^{(D)} = 0, \dot{q}^3 v_3^{(D)} = 0$. If $\dot{q}^3 > 0$ then only the first equation holds. Depending on the result of the LCP, there are four possible working

modes each with different equations of motion and with different indicator functions. If both diodes are blocking, the set of motion equations degenerates to an empty set.

Fig. 9 depicts the time histories of the two voltage sources in a dynamic simulation (the arrows in Fig. 8 mark the direction of the voltage drop). The diode's values belonging to are shown in Fig. 10. There are six time intervals separated from each other by the switching of one of the diodes. Note that if D3 is conducting, the transition happens with time delay because of continuity reasons (e.g. from interval 1 to 2). If D3 is blocking then the answer to the step of the voltage source occurs immediately (D2 changes its working mode).

Dynamic simulations with the commercial tool for electrical systems "Simplorer" yield the same results for both examples.

7 Conclusion and Acknowledgement

The paper presents an extension of the Lagrange-based unified mathematical theory for modelling electromechanical systems (EMS) from [1, 5]. Using the Linear Complementarity Problem (LCP), electrical switching components can be explored within this theory. Because of the unified approach, besides the analysis of such systems also steps for the synthesis in a mechatronic sense become possible. Coupling Lagrange-based theory of EMS and the LCP yields a basis for the investigation of electromechanical systems including arbitrary unilateral constraints (in the electrical and/or the mechanical subsystem).

All research work have been done within the Collaborative Research Centre Sonderforschungsbereich 379 at the Chemnitz University of Technology supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft.

References:

- [1] Enge, O., Kielau, G., Maißer, P.: *Dynamiksimulation elektromechanischer Systeme*. VDI-Fortschritt-Berichte, Reihe 20: Rechnerunterstützte Verfahren, Nr. 165. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [2] Glocker, C.: *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. Dissertation, TU München, 1995.
- [3] Gründer, T.: *Allgemeine Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme der Leistungselektronik mittels Formelmanipulation*. Dissertation, TU Chemnitz, 2000.
- [4] Maißer, P.: Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. *ZAMM*, 68(10):463–481, 1988.
- [5] Maißer, P., Enge, O., Freudenberg, H., Kielau, G.: Electromechanical Interactions in Multibody Systems Containing Electromechanical Drives. *Journal Multibody System Dynamics*, 1(3):281–302, 1997.
- [6] Mehner, J.: *Entwurf in der Mikrosystemtechnik*. Habilitation, TU Chemnitz, 1999.
- [7] Shampine, L.F., Allen, R.C.: *Numerical Computing: An Introduction*. Saunders, Philadelphia, 1973.

Modellierung und Simulation eines hochdynamischen Achsverbundes an Werkzeugmaschinen

G. Reinhart, G. Englberger, Th. Oertli

Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (iwb)
Technische Universität München
Boltzmannstraße 15, D-85748 Garching, Germany

Abstract

Numerically controlled (NC) feed drive systems for machine tools are subject to increasing demands regarding feed velocity and precision. Potentials to enhance performance can be realized if the mechatronic character of the NC drive systems is taken into account. This paper presents a simulation based method for predicting and optimizing the motion dynamics of NC drive systems from the early design stages on. The simulation model comprises all relevant sub-systems, such as the control unit, the electric drive system and the integral mechanical system, consisting of the drive trains and the frame components. The sub-models are optimized step by step and transformed for the purpose of model integration in order to enable a closed model solution. The application of the relevant steps is exemplified through a horizontal and a universal machining center.

Einleitung

Werkzeugmaschinen stellen einen entscheidenden Schlüsselfaktor der Produktionstechnik dar. Sie sind technologisch komplexe Systeme, deren Entwicklung von der Forderung nach einer ständigen Erhöhung der Produktivität und der Qualität geprägt ist. Sie zeichnen sich zunehmend durch mechatronische Eigenschaften aus, da aufgrund der starken Wechselwirkungen die mechanischen, elektro- und informationstechnischen Aspekte kaum noch isoliert betrachtet werden können (Bild 1). Die starke, internationale Konkurrenzsituation erfordert außerdem, dass Neuentwicklungen unter erheblichem Zeit- und Kostendruck ausgeführt werden. In dem Zusammenhang nimmt die Leistungsfähigkeit der Produktentwicklung als Wettbewerbsfaktor an Bedeutung zu. Diesem Aspekt wird bei der Entwicklung von Werkzeugmaschinen durch zunehmende Berücksichtigung des mechatronischen Charakters Rechnung getragen. Entscheidende Maßnahme ist dabei die enge Integration der an der Entwicklung beteiligten Fachbereiche Mechanik, Elektrotechnik und Informationstechnik [2].

NC-Vorschubsysteme von Werkzeugmaschinen

Im Hinblick auf eine Erhöhung der Produktivität und der Bearbeitungsqualität von Werkzeugmaschinen besitzen die NC-Vorschubsysteme eine zentrale Bedeutung (Bild 1). Die Vorschubantriebe haben die Aufgabe, nach Vorgabe der NC-Steuerung die einzelnen Maschinenachsen mit der geforderten Genauigkeit zu verfahren. Der Interpolator der NC-Steuerung setzt die geometrischen und technologischen Informationen des NC-Programms in Sollwertvorgaben für die Haupt- und Vorschubantriebe um. Für jede Vorschubachse entspricht dies dem zeitlichen Verlauf für den achsspezifischen Lagesollwert. Der Elektromotor erzeugt ein Antriebsmoment, das durch die mechanischen Übertragungselemente in eine am Schlitten angreifende Vorschubkraft umgesetzt wird. Die Messsysteme erfassen die Ist-Werte der Lagen

und Geschwindigkeiten der bewegten Komponenten sowie des momentenbildenden Stromes im Servomotor. Durch Vergleich mit den Soll-Werten berechnen die Achsregelungsmodule die Spannungen zur Ansteuerung der Servomotoren [5].

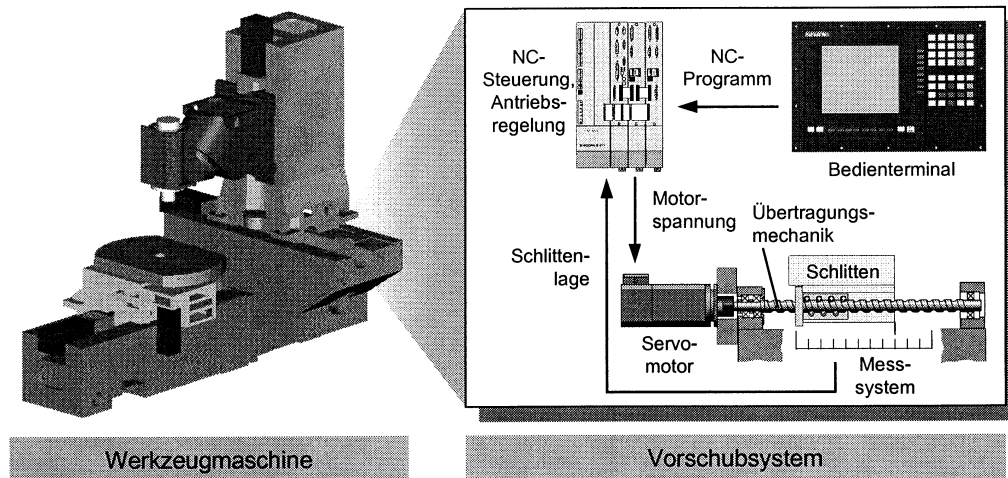


Bild 1: Mechatronisches System: Mechanik, Steuerungstechnik, Informationstechnik

Moderne digitale Regelungsmodule in Kombination mit trägheitsarmen Servomotoren und gewichtsoptimierten Schlitteneinheiten ermöglichen prinzipiell eine deutliche Steigerung der Dynamik von NC-Vorschubantrieben. Bei der Entwicklung derart hochdynamischer Vorschubantriebe sind die Wechselwirkungen zwischen der Steuerungstechnik, den Servomotoren, der Antriebsmechanik und den Messsystemen verstärkt zu beachten. Bei rotatorischen Antriebssystemen erweist sich meist die Antriebsmechanik auf Grund ihrer nur gering gedämpften kritischen Eigenfrequenzen als dynamische Schwachstelle und begrenzt dadurch den nutzbaren Dynamikbereich des Gesamtsystems. Aus Untersuchungen des Verhaltens der Vorschubachsen verschiedener Maschinen im Betrieb geht hervor, dass die Vorschubantriebe einer gegenseitigen Beeinflussung unterliegen [9], [11]. Bild 2a stellt die Antwort der y-Achse auf einen Lagesollwertsprung der x-Achse einer Versuchsmaschine dar. Verursacht werden solche beschleunigungsabhängige Wechselwirkungen durch die Strukturelastizität des Maschinengestells. Zur Steigerung der umsetzbaren Antriebsleistungen werden zunehmend - teils rechnerunterstützt optimierte - Leichtbaustrukturen für die bewegten Gestellkörper entwickelt [10]. Allerdings ist mit der Gewichtsminimierung ein Anstieg der Strukturnachgiebigkeit in Kauf zu nehmen, der sich negativ auf die Bearbeitungsgenauigkeit auswirkt und die Reglerbandbreite begrenzt. Bei einer optimal ausgelegten Maschinenstruktur wird die erreichbare Dynamik also nicht mehr durch Schwachstellen innerhalb der Antriebsmechanik allein, sondern durch das Eigenverhalten der Gesamtstruktur beschränkt. Experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, dass Nachgiebigkeitsanteile sowohl aus dem Bereich der Antriebe, als auch des Gestells das Gesamtverhalten gemeinsam beeinflussen (Bild 2b). Bei der Auslegung der Vorschubantriebe für zukünftige Maschinengenerationen wird hinsichtlich der Erreichung des Gesamtoptimums diesem Effekt eine verstärkte Berücksichtigung beizumessen sein [7]. Die Simulationstechnik stellt effiziente Hilfsmittel zur Verfügung, um die Maschinengenauigkeit und erreichbare Dynamik als explizite Entwicklungsziele bereits während der Konstruktionsphase vorherzusagen. Die Bestimmung und Optimierung dieser Eigenschaften beginnt damit bereits am virtuellen Modell und nicht erst am physikalischen Prototypen.

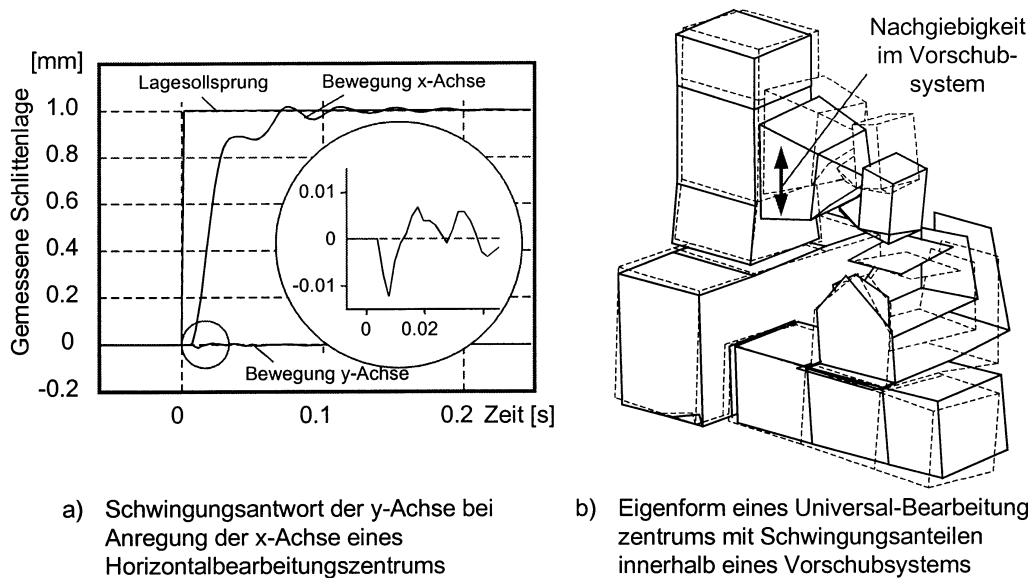


Bild 2: Experimentelle Untersuchungen strukturdynamischer Wechselwirkungen im Gesamtsystem

Modellbildung von NC-Vorschubsystemen

Grundlage für die Simulation ist eine mathematische Beschreibung des Systemverhaltens in Form eines Rechnermodells. NC-Vorschubsysteme sind technologisch komplexe Systeme aus mechanischen, elektrischen und informationstechnischen Komponenten, für deren Modellbildung unterschiedliche physikalische Zusammenhänge zu berücksichtigen sind. Zur Simulation derartiger Systeme im Zeitbereich hat sich die Verwendung blockorientierter numerischer Simulationssysteme bewährt, wobei sich gerade in den letzten Jahren das Programmsystem Matlab/Simulink¹ zu einem Standardwerkzeug im technisch-wissenschaftlichen Bereich entwickelt hat [3], [11]. Bei NC-Vorschubsystemen werden zum Zweck der teilsystemspezifischen Modellbildung zunächst die elektrische Antriebs- und Steuerungstechnik sowie die Mechanik als Teilsysteme unterschieden (Bild 3).

Die Entwicklungsaufgaben des Maschinenherstellers im Bereich der elektrischen Antriebs- und Steuerungstechnik besteht i. A. aus der Auswahl geeigneter Zukaufprodukte und deren Konfiguration und Programmierung für den maschinenspezifischen Einsatz. Dementsprechend muss das Modell einerseits das geregelte Antriebsverhalten von der Vorgabe der Führungsgrößen durch den Interpolator, über die Aufnahme der aktuellen Istwerte, bis hin zur Umsetzung der Ergebnisse der Regelungstechnik in die Antriebsmomente der Servomotoren, abbilden. Andererseits muss es diejenigen Konfigurations- und Programmiermöglichkeiten enthalten, die den Entwicklungstätigkeiten des Maschinenherstellers entsprechen.

Die Konstruktion des mechanischen Systems gehört zu den Kernkompetenzen des Werkzeugmaschinenherstellers, weshalb der Modellbildung der Mechanik ein großes Gewicht beizumessen ist. Im Gegensatz zur elektrischen Antriebs- und Steuerungstechnik liegt hier kein fester struktureller Aufbau des Modells vor, da der Entwurf der mechanischen Struktur

¹ Eingetragene Warenzeichen der The MathWorks, Inc., Natick

ein spezifischer Bestandteil der Entwicklungsaufgabe ist. Dementsprechend flexibel ist die Modellbildung der Mechanik zu gestalten. Sie muss alle mechanischen Übertragungselemente des Antriebsstrangs sowie die Gestellkörper, die im Kraftfluss zwischen der Motorwelle und der Prozessstelle (Werkzeug bzw. Werkstück) liegen, umfassen.

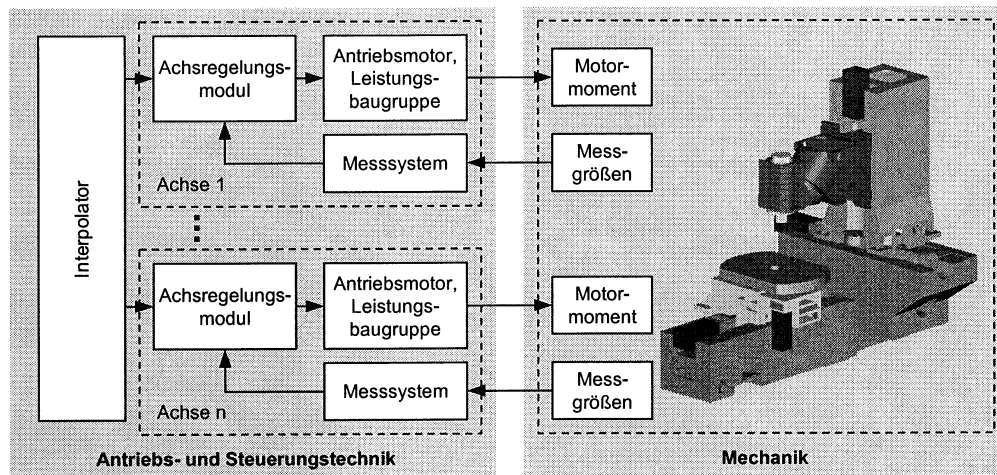


Bild 3: Modulare Struktur der genauigkeits- und leistungsrelevanten Teilsysteme der Werkzeugmaschine

Modell der Antriebs- und Steuerungstechnik

Achsregelungsmodule

Die Aufgabe der Antriebsregelung ist es, die Lage-, Drehzahl- bzw. Momentvorgaben der Bewegungssteuerung in Steuerungsausgangsgrößen für die drehzahlveränderbaren Drehstrommotoren umzusetzen. Üblicherweise werden an spanenden Werkzeugmaschinen sowohl für die Vorschub- wie auch für die Hauptantriebsbewegung für jeden Antriebsstrang eine kaskadierte, digital realisierte Lageregelung mit Lage-, Drehzahl- und Stromregler verwendet. Moderne NC-Steuerungen bieten neben der prinzipiellen Struktur der kaskadierten Lageregelung zusätzlich Vorsteuerungsverfahren, Sollwertfilterungen und –beschränkungen. Die für die Modellbildung der einzelnen Komponenten erforderliche Kenntnis ihrer Funktionsweise und Zusammenhänge können i. d. R. mit ausreichendem Detaillierungsgrad aus den technischen Produktbeschreibungen der Steuerungshersteller abgeleitet werden.

Antriebsmotoren und Leistungsbaugruppe

Der Antriebsmotor wandelt die vom Achsregelungsmodul vorgegebene elektrische Spannung in ein mechanisches Antriebsmoment an der Motorwelle. Im Rahmen der Modellbildung werden das mechanische und das elektrische Teilsystem getrennt behandelt. Die mechanischen Eigenschaften des Motors, die durch die Motorwelle gegeben sind, werden dem Modell der Mechanik zugeschlagen. Nach dem heutigen Stand der Technik werden fast ausschließlich mit symmetrischen, sinusförmigen Strömen gespeiste Synchronservomotoren eingesetzt. Die Modellbildung des Synchronservomotors erfolgt analog zu dem einfacheren Modell der Gleichstromnebenschlussmaschine als PT_1 -Glied mit Drehzahlrückkopplung, da aufgrund

einer feldorientierten Entkopplung der Phasenströme, die Ansteuerung beider Motortypen nach dem gleichen Prinzip erfolgt.

Die Leistungsbaugruppe hat die Aufgabe, vom Stromregler ausgegebene Stellgrößen in elektrische Energie umzusetzen, die zur Versorgung der elektrischen Antriebe dient. In Werkzeugmaschinen werden hierfür ausschließlich sogenannte Wechselrichter eingesetzt, die von einem Gleichspannungszwischenkreis gespeist werden. Untersuchungen haben gezeigt, dass für eine Simulation des mechatronischen Gesamtverhaltens ein Verzögerungsglied 1. Ordnung zur Abbildung des Wechselrichters ausreichend ist [3].

Messsysteme

Wesentliches Merkmal der an digitalen Antrieben eingesetzten Messsysteme ist die Quantisierung der Signalamplituden entsprechend der Auflösung der Aufnehmer. Dadurch wird die analoge Messgröße nicht exakt aufgenommen, wodurch ein Informationsverlust entsteht, der sich auf das Genauigkeitsverhalten der Maschine auswirkt. Im Modell der Messsysteme werden die direkt erfassbaren Messgrößen mit der Auflösung des Messsystems in ihrer Amplitude quantisiert. Falls die Geschwindigkeit durch Differenziation aus dem Lagesignal gewonnen wird, muss dies auch bei der Modellbildung berücksichtigt werden.

Modell des mechanischen Systems

Die Modellbildung der Mechanik hat einerseits zum Ziel, Schwachstellen der Antriebs- und Gestellsstruktur sowie der Auswahl bzw. Dimensionierung der Maschinenelemente frühzeitig zu erkennen. Andererseits soll im Rahmen der Gesamtsystembetrachtung das Bewegungsverhalten der Übertragungs- und Gestellelemente korrekt wiedergegeben werden. Zur Schwachstellenanalyse für nachgiebige mechanische Strukturen stellt die Finite-Elemente-Methode (FEM) innerhalb der Konstruktion von Werkzeugmaschinen ein weithin akzeptiertes und verifiziertes Verfahren dar [1], [4]. Neuere Arbeiten zum methodischen Einsatz der FEM im Produktentwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen haben gezeigt, dass sich das Verfahren auch zur Abschätzung des Eigenverhaltens in sehr frühen Entwicklungsphasen eignet [10]. Für die vorliegende Betrachtung wurde eine Methode zur Ableitung eines regelungstechnischen Modells für das Bewegungsverhalten anhand eines FEM-Modells zur Anwendung gebracht [4], [12]. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass die Bewegungsgleichungen auf Basis von FEM-Entwurfsmodellen der mechanischen Konstruktion ohne weiteren Modellierungsaufwand aufgestellt werden können. Man erhält das Gleichungssystem in der Darstellungsform einer Zustandsdifferentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (2)$$

Mit der Systemmatrix \mathbf{A} , der Eingangsmatrix \mathbf{B} und dem verallgemeinerten Zustandsvektor \mathbf{x} der Lagen und Geschwindigkeiten im Zustandsraum:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Das Erzeugen der Massenmatrix \mathbf{M} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} erfolgt durch das FEM-Programm. Für die Dämpfungsmatrix wird der proportionale Dämpfungsansatz ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$) verwendet, der sich aufgrund der bei Werkzeugmaschinen typischerweise niedrigen (2-10%) und räumlich verteilten Dämpfung als gute Näherung erwiesen hat [1], [4].

Der Erregervektor \mathbf{e} und der Eingangsvektor \mathbf{u} bestimmen die auf das mechanische Antriebssystem wirkenden Kräfte und Momente. Im Rahmen der Modellbildung der NC-Vorschubsysteme werden hierbei neben dem an der Motorwelle wirkenden elektrischen Motormoment M_{Mot} auch externe Kräfte F_{ext} und Momente M_{ext} an den bewegten Komponenten berücksichtigt. Über die Messmatrix \mathbf{C} werden die messbaren Lagen und Geschwindigkeiten des Zustandsvektors \mathbf{x} in den Ausgangsvektor \mathbf{y} ausgeleitet.

Zur Reduktion der Systemordnung des Modells für die Zeitbereichssimulation wird das Gleichungssystem auf Jordan'sche Normalform transformiert und an Hand einer Dominanzanalyse eine modale Ordnungsreduktion durchgeführt [4], [6]. Damit liegt das Modell des Bewegungsverhaltens wiederum als System- und Eingangsmatrix vor, welche im Vergleich zur Ordnung n_{orig} des mit Hilfe der FEM erzeugten Originalsystems eine deutlich kleinere Systemordnung $n_{red} \ll n_{orig}$ aufweisen. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen der Antriebsmechanik durch eine Reduktion der Systemordnung von FEM-Modellen stellt eine Methode dar, die eine für die Simulation des Bewegungsverhaltens von Maschinenkomponenten um einen Arbeitspunkt geeignete mathematische Beschreibung auf konsistente und weitestgehend automatisierbare Weise bereitstellt.

Methodik zur Auslegung von Achsverbünden

Zur gesamtheitlichen Gestaltung der Achsverbünde als modulare Funktionseinheiten wird ein schrittweises Vorgehen vorgeschlagen (Bild 4). Zunächst erfolgt die gemeinsame Entwurfskonstruktion der Antriebsmechanik, die Motorauslegung und die Synthese bzw. Auswahl des zugehörigen Reglers. Die Anforderungen an die Einzelantriebe einer Werkzeugmaschine ergeben sich aus den Genauigkeits- und Leistungsanforderungen an die Gesamtmaschine sowie den projektierten Maschinendaten, wie Prozess- und Werkstückspektrum und Arbeitsraumvolumen. Als Zielkriterien für den Optimierungsprozess der Einzelantriebe sind demzufolge die Bauraumabmessungen für die Vorschubantriebe, Verfahrenswege, erforderliche Steifigkeiten der Antriebsachsen, geforderte Schwingungseigenschaften und regelungstechnisches Verhalten zugrunde zu legen. Die Entwurfsmodelle für die Reglerauslegung werden weitestgehend automatisiert aus den zur Schwingungsanalyse der Antriebsmechanik aufgebauten Modellen abgeleitet. Dadurch ist zu jedem Zeitpunkt eine parallele Optimierung im mechanischen Teil der Antriebsstruktur (Betrachtung im Frequenzbereich) und im geregelten integrierten Einzelachsverhalten (Betrachtung im Zeitbereich) möglich. Die Konsistenz der Modellbildung bei der Mechanik- und Regleroptimierung wird dabei aufgrund der gemeinsamen Datenbasis gewährleistet.

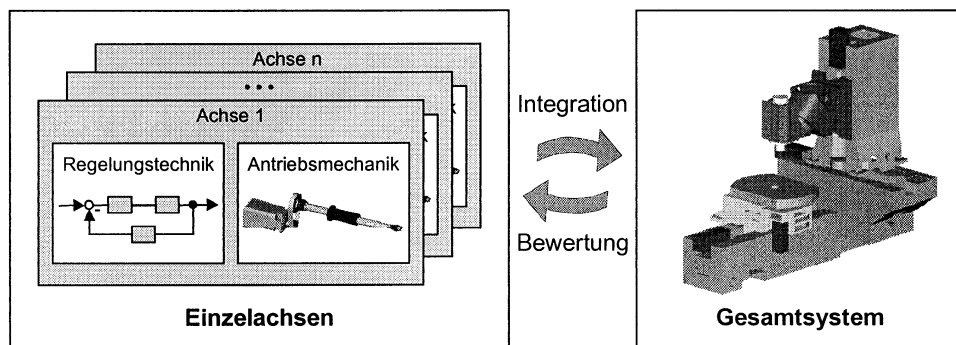


Bild 4: Schrittweise Optimierung der Vorschubsysteme und des Gesamtsystems

In einem weiteren Schritt werden die Einzelantriebe zum Gesamtsystem, d. h. mit dem Modell der Gestellstruktur zusammengeführt. Die Simulation eines Gesamtmaschinenmodells ermöglicht es, das Zusammenspiel der einzelnen Vorschubantriebe in der Wirkungskette der Gesamtmaschine zu überprüfen. Somit ist eine aussagekräftige Bewertung der realisierbaren Eigenschaften der Einzelantriebe anhand des resultierenden Gesamtsystemverhaltens möglich. Nach der Optimierung der Reglerparameter und der Kenngrößen der NC-Bewegungsführung wie zulässiger Maximalruck und zulässige maximale Achsbeschleunigung, wird eine Abschätzung und Bewertung der erzielbaren Maschinendynamik und Maschinengenauigkeit vorgenommen. Dies wiederum ist die Grundlage für eine Schwachstellenanalyse des Gesamtsystems bezogen auf das Antriebsverhalten.

Anwendungsbeispiel

Simulation des mechanischen Übertragungsverhaltens der Vorschubsysteme

Zur Modellbildung und Simulation des Übertragungsverhaltens rotatorischer elektrischer Vorschubantriebe kommt das am *iwb* entwickelte Berechnungsprogramm ELFE_FE (Electric Feed Drives – Finite Elements) zum Einsatz [4], [12]. Zur Modellierung der mechanischen Struktur der Vorschubantriebe steht eine Auswahl typischer Übertragungselemente, wie z. B. Zahnriemenstufe oder Kugelgewindemutter, in Form einer antriebspezifischen Elemente-Bibliothek zur Verfügung. Der zu generierende Datensatz enthält zum größten Teil rein geometrische Systemgrößen (z. B. Wellenabmessungen), die den Konstruktionsunterlagen des Maschinenherstellers zu entnehmen sind. Die darüber hinaus benötigten Parameter von Maschinenelementen mit diskreten Eigenschaften (z. B. Lagersteifigkeiten, Zahnriemensteifigkeit) sind i. d. R. in den technischen Produktbeschreibungen der Komponentenhersteller direkt enthalten oder werden programmintern aus den komponententypischen Dimensionierungsgrößen berechnet.

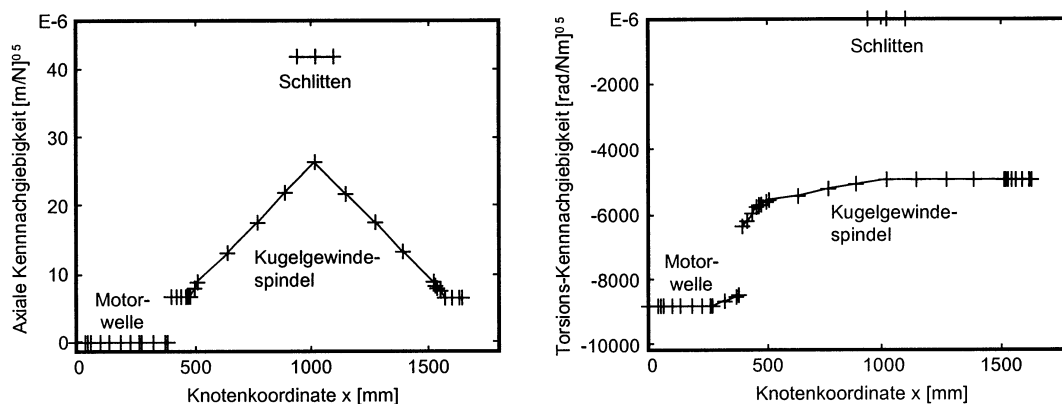


Bild 5: Nachgiebigkeitsnormierte Schwingungsform der x-Achse des Universal-Bearbeitungszentrums bei der ersten mechanischen Eigenfrequenz

Zur Optimierung der Übertragungsmechanik werden die dynamischen Eigenschaften im Frequenzbereich analysiert. Bild 5 zeigt die nachgiebigkeitsnormierte Schwingungsform der x-Achse eines Universal-Bearbeitungszentrums bei der ersten Eigenfrequenz. Dargestellt ist die mechanische Übertragungsstrecke von der Motorwelle über die Kugelgewindespindel bis zum Schlitten. Aus der getrennten Darstellung der axialen und der Torsions- und Biegnachgie-

bigkeiten (letztere im Bild nicht dargestellt) lassen sich Schwachstellen der Antriebsstruktur und deren Ursachen ermitteln und beheben.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Vorschubachsen unter dem Einfluss der nachgiebigen Gestellstruktur wird ein universelles, kommerziell verfügbares FE-Programmsystem eingesetzt. Die FE-Strukturen für die Gestellkörper werden auf Basis von 3D-Geometriemodellen mit CAD-integrierten Netzgeneratoren erzeugt und in den FE-Präprozessor importiert. Fügestellen, wie z. B. Linearführungseinheiten, werden durch geeignete Ersatzsteifigkeiten abgebildet. Um die Übertragungsmechaniken der Vorschubantriebe detailliert zu modellieren wurde das FE-Programm um antriebsspezifische Modellbausteine, z. B. dem Kugelgewindetrieb, erweitert, zu deren Modellbildung auf die bewährten Beschreibungsformen des oben erwähnten Programms ELFE_FE zurückgegriffen werden konnte [8]. Bild 6 zeigt die Schwingungsform des Universal-Bearbeitungszentrums bei der ersten, für die x-Achse relevanten, Eigenfrequenz. Zu erkennen sind hier neben dem globalen Verhalten der Maschine lokale Wechselwirkungen der Antriebe mit der Gestellstruktur, beispielsweise eine Deformation des Festlagerflansches am Maschinenbett, oder die mit einer Spindelbiegung gekoppelte Kippung der Spindelmutter.

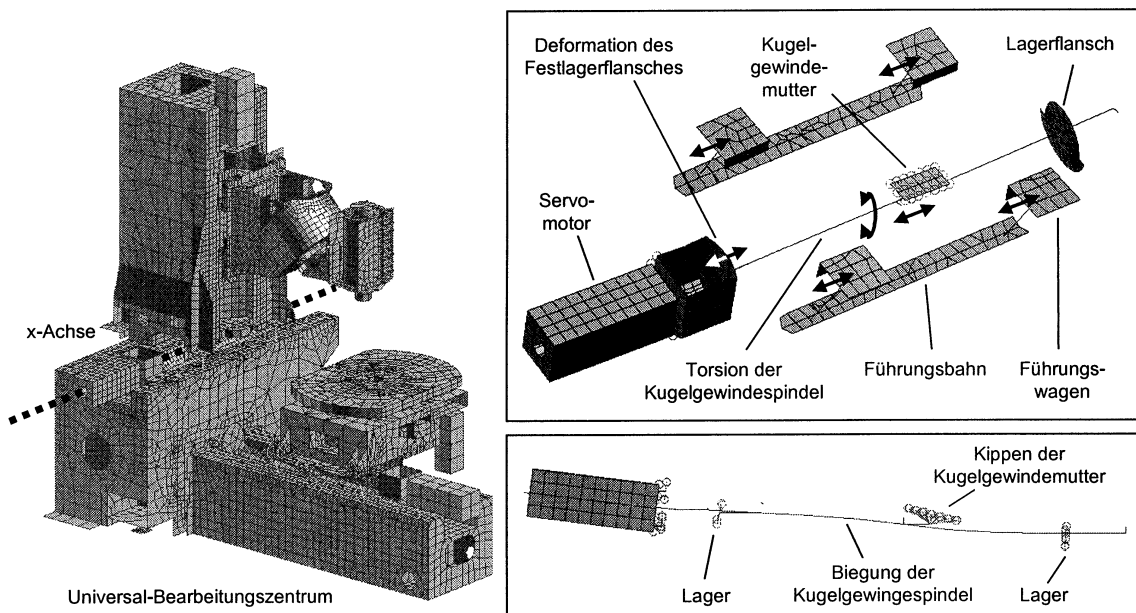


Bild 6: Integrierte FE-Simulation des Strukturverhaltens der Antriebe und des Gestells

Simulation des geregelten Bewegungsverhaltens der Vorschubsysteme

Nach der Optimierung des mechanischen Teils der Vorschubantriebe im Frequenzbereich erfolgt die weitere Betrachtung des geregelten Verhaltens im Zeitbereich. Das Ziel der Simulation besteht in der Vorherbestimmung des dynamischen Bahnverhaltens für das als Entwurf vorliegende Vorschubsystem während der Konstruktionsphase. Zu diesem Zweck wird das FE-Modell der Einzelachse über den Weg der modalen Ordnungsreduktion in ein regelungstechnisches Modell überführt. Bei der Auswahl der in das ordnungsreduzierte Modell übernommenen Zustände, werden im Sinne einer möglichst geringen Systemordnung nur die für

das geregelte Systemverhalten relevanten Strukturpunkte berücksichtigt. Im Wesentlichen entspricht dies den Lagen und Geschwindigkeiten an der Motorwelle sowie am Schlitten.

Die Struktur des Antriebs- und Steuerungsmodells wird zur Vorherbestimmung des Verhaltens der Antriebe i. d. R. nicht verändert, wohingegen die genauigkeits- und leistungsrelevanten Inbetriebnahmeparameter in diesem Modell variierbar sind. Nach dem Einlesen der realen Maschinendaten in das Antriebs- und Steuerungsmodell und der Übernahme des ordnungsreduzierten Mechanikmodells in das Gesamtmodell wird eine Simulation im Zeitbereich durchgeführt. Zur Verifikation der Modellbildung wurde am Beispiel eines Horizontal-Bearbeitungszentrums ein nicht interpolierter Lagesollwertsprung von 1 mm durchgeführt. Der Verlauf der gemessenen und simulierten Schlittenbewegung zeigt dabei hinsichtlich des dominanten Systemverhaltens eine gute Übereinstimmung (Bild 7a). Die Ergebnisse zeigen, dass die vorgestellte Vorgehensweise zur Modellbildung und Simulation von Vorschubsystemen geeignet ist, um die Grenzen der Steuerungsparameter bereits in der Entwicklungsphase abzuschätzen.

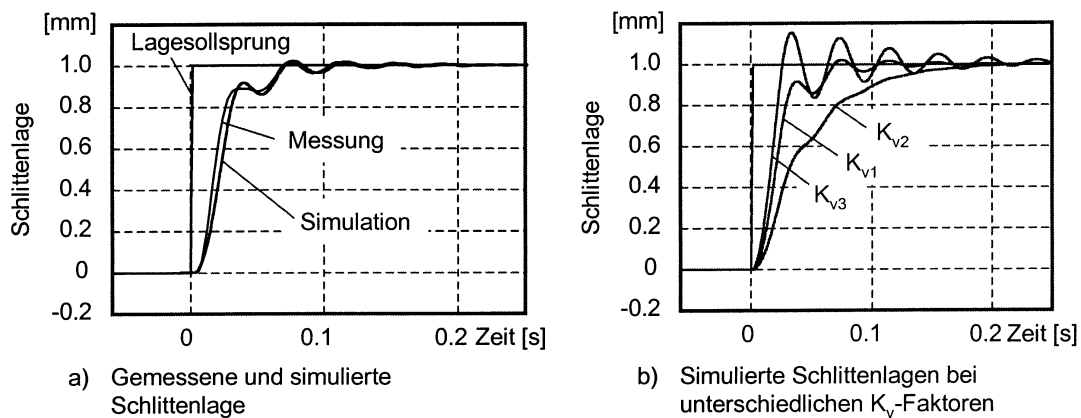


Bild 7: Gemessene und simulierte Sprungantworten am Bearbeitungszentrum

Am Beispiel von drei unterschiedlichen Proportionalbeiwerten des Lagereglers (K_v -Faktor) sind in Bild 7b die Sprungantworten gegenübergestellt. Herstellerseitig ist bei der Versuchsmaschine der Faktor K_{v1} eingestellt. Wird dieser Wert auf die Hälfte verringert ($K_{v2} = 0.5 K_{v1}$), stellt sich ein langsames Verhalten ein. Bei Erhöhung auf den 1,5-fachen Wert (K_{v3}) neigt das Gesamtsystem zum Überschwingen, was bei Werkzeugmaschinen hinsichtlich der Abbildung dieses Verhaltens als Bearbeitungsfehler am Werkstück zu vermeiden ist.

Zusammenfassung

Die hohen Anforderungen an die Genauigkeit und dynamische Leistungsfähigkeit moderner Werkzeugmaschinen erfordern eine integrierte, mechatronische Betrachtungsweise bei der Auslegung der NC-Vorschubantriebe. Die Simulationstechnik bietet leistungsfähige Werkzeuge zur Analyse und Optimierung der Systemeigenschaften bereits während der Entwicklungsphase. Der Aufwand für die Erstellung der Simulationsmodelle und die Durchführung der Simulationen soll jedoch nicht unterschätzt werden. Mit einer auf die Entwicklungsanforderungen angepassten, durchgängigen Simulationsmethodik, die eine Weiterverwendung bereits erstellter Modelle in weiterführenden Simulationen ermöglicht, kann der Aufwand erheblich reduziert werden. Zugleich wird damit eine höhere Erkenntnisausbeute aus den vor-

handenen Modellen und damit eine Effizienzsteigerung für die Simulation erreicht. Die vorgestellte Simulationsmethodik zur Auslegung hochdynamischer NC-Vorschubsysteme ist Teil eines integrierten, mechatronischen Entwicklungsprozesses für Werkzeugmaschinen. Beginnend mit der Modellbildung der einzelnen Teilsysteme werden zunächst die elektrische Antriebs- und Steuerungstechnik, das mechanische Übertragungssystem sowie die Gestellstruktur isoliert betrachtet. In einem erweiterten Modellierungsansatz für das mechanische Teilsystem werden das Modell der Antriebe und des Gestells zusammengeführt und damit das strukturdynamische Gesamtverhalten der Maschine untersucht. Zur Vorhersage der dynamischen Bahngenaugkeit und Leistungsfähigkeit der Antriebe erfolgt eine Modellintegration für die mechatronische Betrachtung einer Einzelachse. Eine Verifikation dieser Simulationsergebnisse konnte an Hand messtechnischer Untersuchungen an einem Bearbeitungszentrum erfolgreich durchgeführt werden. Als weiterer methodischer Schritt steht im Rahmen aktueller Forschungsarbeiten am *iwb* die Integration des vollständigen Maschinenmodells unter Berücksichtigung aller Antriebe in einem mechatronischen Gesamtmodell noch bevor.

Literatur

- [1] **Albertz, F.:** *Dynamikgerechter Entwurf von Werkzeugmaschinen-Gestellstrukturen*. Berlin: Springer 1995. (iwb Forschungsberichte 93)
- [2] **Bianchi, G.; Paolucci, F.; Van den Braembussche, P.; Van Brussel H.:** *Towards Virtual Engineering in Machine Tool Design*. Annals of the CIRP, Vol. 45 (1996) 1, S. 381-384.
- [3] **Bürgel, R.:** *Prozessanalyse an spanenden Werkzeugmaschinen mit digital geregelten Antrieben*. München: Herbert Utz 2001. (iwb Forschungsberichte 151)
- [4] **Eubert, P.:** *Digitale Zustandsregelung elektrischer Vorschubantriebe*. Berlin: Springer 1992. (iwb Forschungsberichte 51)
- [5] **Groß, H.; Hamann, J.; Wiegärtner, G.:** *Elektrische Vorschubantriebe in der Automatisierungstechnik*. Erlangen: Publicis MCD 2000.
- [6] **Litz, L.:** *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*. Dissertation Universität Karlsruhe 1979.
- [7] **Pritschow, G.; Gronbach, H.; Hänle, U.:** *Strukturnachgiebigkeiten beeinflussen die Bearbeitungsgenauigkeit*. Produktion und Management - wt, Band 86 (1996) 7/8, S. 367-371.
- [8] **Reinhart, G.; Oertli, Th.; Zeller, W.:** *Auslegung von NC-Antrieben unter Berücksichtigung strukturdynamischer und prozessbedingter Wechselwirkungen*. In: Schwingungen in Antrieben, Würzburg. Düsseldorf: VDI-Verlag 2001, S. 187-207. (VDI-Berichte 1630)
- [9] **Reinhart, G.; Weißenberger, M.:** *Multibody Simulation of Machine Tools as Mechatronic Systems for Optimization of Motion Dynamics in the Design Process*. Proc. of the 1999 IE-EE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics AIM'99, Sept. 19-23, 1999. Atlanta, USA, S. 605-610.
- [10] **Schneider, C.:** *Strukturmechanische Berechnungen in der Werkzeugmaschinenkonstruktion*. München: Herbert Utz 2000. (iwb Forschungsberichte 144)
- [11] **Weikert, S.; Knapp, W.:** *Anwendung integrierter Methoden zur Beurteilung von Maschinenkonfigurationen für die Hochgeschwindigkeitsbearbeitung*. In: Großmann, K.; Wiemer, H. (Hrsg.): *Simulation im Maschinenbau SIM 2000*, Dresden, 24./25.02.2000, S. 763-774.
- [12] **Zeller, W.:** *Ganzheitliche Optimierung lagegeregelter Vorschubantriebe*. VDI-Z Spezial Antriebstechnik (1997), S. 52-56.

Danksagung

Die in diesem Beitrag zusammengefassten Arbeiten werden in Teilen von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms *Innovative rechnerunterstützte Konstruktionsprozesse: Integration von Gestaltung und Berechnung* sowie von der Bayerischen Forschungsstiftung im Rahmen des *Forschungsverbundes Simulationstechnik (Forsim II)* gefördert.

Measure-Based Simulation of the Lower-Extremity Motion of Patients for Pre-Operative Chirurgical Planning

M. Stolz^{*‡}, A. Kecskeméthy^{*}, V. Saraph[‡], G. Steinwender[‡] and B. Zwick[‡]

^{*}Institut f. Mechanik und Getriebelehre, Techn. Universität Graz, Austria

[‡]Laboratory for Gait Analysis, Univ. Klinik f. Kinderchirurgie Graz, Austria

ABSTRACT — *In the decision-making process of orthopedic surgeons about treatment in gait abnormalities like cerebral palsy, computer models for calculating the lower extremity joint kinematics and kinetics are an important and nowadays standard tool for finding and distinguishing between the cause of primary deformities and secondary (coping) responses. Although there are to date many computer based bio-mechanical models of human lower extremity, it is in most cases difficult to implement new own sub models or exchange parts of the model, because the software is not flexible enough or not open for editing. Moreover, systematic errors due to generic assumptions that do not apply to the specific patient data are difficult to localize and to correct. In the present paper, a lower extremity model is developed by virtue of which the individual effects of external loads and motions on the resultant net joint torques can be analyzed in detail. The model is programmed using an object-oriented multibody library, allowing the analyst to investigate all relevant information within the human limb, as well as the influence of individual parameters. To this end, a virtual adaptive kinematic model of the anatomic counterpart is developed. It is shown by this model that generic assumptions on limb functionality lead to systematic errors, which however are not significant with respect to functional data used for diagnosis.*

Keywords: biomechanics, 3D model of lower extremity, measure based simulation, inertia properties

Introduction

The prognosis for walking in spastic children is good, with around 80% being community walkers [9]. Cospasticity of muscles acting across the joints, and the development of musculo-skeletal deformities make the gait of a diplegic child laborious and energy consuming. Physical examination and instrumented gait analysis enable today the surgeon to perform surgery for gait improvement in a single event with better outcomes [1][5]. In addition, it provides an accurate assessment of outcomes

[3][8]. Kinematics provide pure geometric information on joint motion. However, kinetics are essential for differentiating between primary deformities and secondary (coping) responses [3][8]. DeLuca et al. have demonstrated the advantages of combining gait analysis and physical examination data in the selection of surgical procedures for gait improvement surgery [2]. Concern has been expressed in several reports that operating upon spastic muscles might further damage their compromised function [6][7]. Models of the musculo-

skeletal system that help to understand the bio-mechanical consequences of surgically manipulating musculo-skeletal structures are needed to analyze difficult surgeries and to design more effective procedures. Especially computer graphics-based models allow the surgeon to study how surgical changes in musculo-skeletal geometry and musculotendon parameters (e.g., optimal muscle-fiber length and tendon slack length) affect the forces and joint moments produced by the lower-extremity muscles. The development of such software permits one to manipulate the musculo-skeletal geometry and adjust the model parameters to determine the sensitivity of a surgical outcome to the parameters of a surgical procedure. A typical example of results obtained from the simulation is displayed in Fig. 1. The plots show the time histories of the knee flexion and the associated mo-

ment before and after surgical intervention. It is clearly seen how, after operation, the patient applies less torque in the first 40% of the gait cycle, leading to less strenuous walking. Hence, such plots are now well established as diagnosis tool, comparable to x-rays in traditional static analysis. Due to the combined processing of computational models and sensoric information, the overall problem can be regarded as a subset of mechatronic system design, consisting of a mechanical skeleton, measurement modeling and processing, and modeling of complex actrics. Moreover, future work may consider experimental setups in which the biologic subsystem is embedded in a robotic environment. It is the purpose of this paper to provide an easily extendable biomechanical model of the lower extremity that is amenable to mechatronic concepts as well as medical issues.

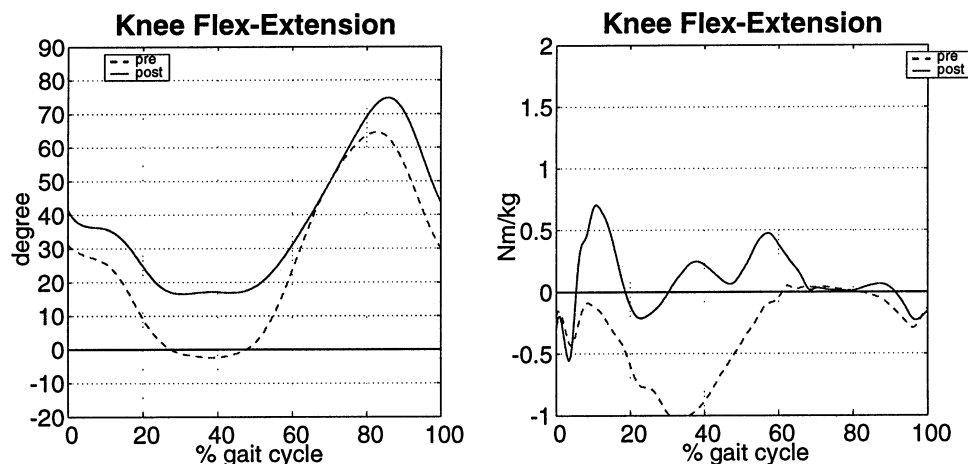


Figure 1: Two example plots (out of a set) showing differences before and after surgery

Adaptive Skeleton Model

The present modeling of the lower extremity consists of a structural and a parameter part. Model parameters are identified using a three dimensional motion capturing system (*VICON, Oxford Metrics*) together with an ensuing kinematics and kinetics simulation of the gait cycle. The mo-

tion capturing system consists of six infrared cameras which track the spatial motion of special reflective markers applied on the patient skin. The cameras sample frequency is 50Hz. The position and orientation of the leg segments and joints are evaluated from the positions of the markers and are stored for every sampled time. Ground

reaction forces are gathered synchronically from two force plates. The time scale of the logged data is normalized based on a full gait cycle. Kinetic values are divided by the weight of the patient.

Overview of the Lower Limb Model

The anatomic lower extremity model consists of a kinetostatic skeleton comprising (a) coordinate frames \mathcal{K}_x describing

the spatial pose at the ends of the bones, (b) rigid bodies describing the bones, and (c) ball-and-socket joints \mathcal{G}_x describing the anatomic joints, see Fig. 2. The kinematic inputs for this model are (1) the spatial motion of the pelvis center, modeled by a pseudo-joint $\mathcal{G}_{\text{Free Body}}$, and (2) three pitch-yaw-roll angles at the hip, the knee and the ankle joint, respectively.

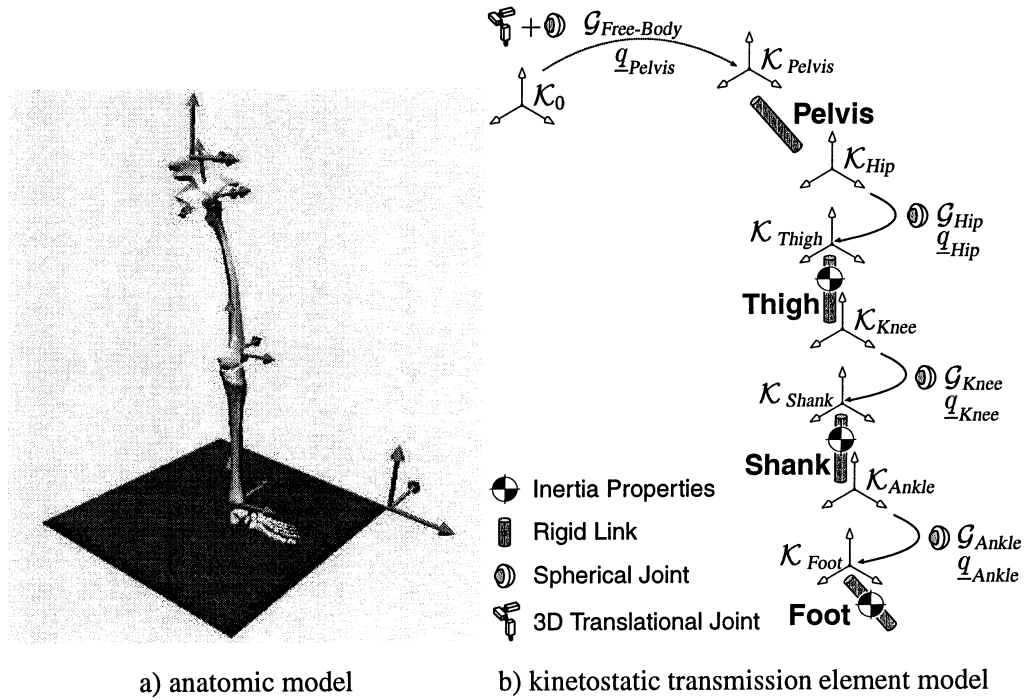


Figure 2: Kinetostatic chain of transmission elements

For the fitting of measured data, an additional self-configuring model is proposed, in which three additional prismatic joints are placed between the ends of each limb (see Fig. 3). The predicted model corresponds to a twin kinetostatic skeleton which is connected to the anatomic kinetostatic skeleton at the spots where the markers are placed, as these can be assumed to have no relative motion both with respect to the anatomic and the predicted skele-

ton, respectively, at those places. Hence, anatomic and prediction skeletons can be viewed as mechanisms that are coupled through closed kinematic chains. The fitting of the predicted leg model to the anatomic leg parameters consists of two steps. In a first step, the adaptive skeleton is run with unlocked prismatic joints. By virtue of the twin-skeleton model, it is clearly seen that if there is a mismatch of predicted and anatomic models, the predicted model will

display varying bones lengths. These length variations are physically unfeasible, but can be used to predict the source of errors between anatomic and predicted model, as shown in Section **Results**.

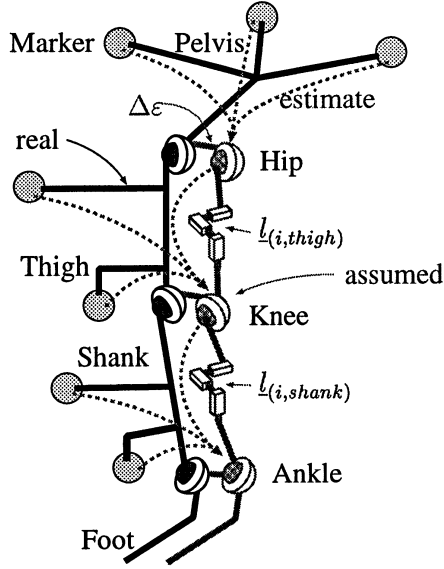


Figure 3: Ball-and-socket-joint

In a second step, the bone length variations through a complete gait cycle are averaged. These mean bone lengths are then used for simulation of the gait cycle with locked prismatic joints in the predicted model. This approximation is now physically consistent,

but does not predict the position of the joint locations accurately. This is due to (1) deviations of the real joints from their ideal counterparts as spherical joints, (2) random errors occurring in motion capturing (e.g. marker to bone movement), and (3) wrong estimates for the location of the joint centers. By using the proposed twin-skeleton model, it will be shown that the main source of errors is due to (3).

Estimation of Joint Time Histories

Because the motion capturing comprises only position and orientation, velocities and accelerations have to be determined numerically from the time histories of the sampled data. This was realized in the present context through filter smoothing in configuration space using a forth order Butterworth digital filter and a cubic spline approximation. Joint space trajectories were obtained by calculating the final position, velocity and acceleration of the bone end frames via the prediction kinetostatic chain with locked prismatic joints and matching these in the interpolated configuration space. Gravitational forces and ground reaction forces were regarded as applied forces acting on the skeleton. Together with the inertia forces, they lead to the generalized forces (torques) in the joints which are calculated in the inverse dynamics.

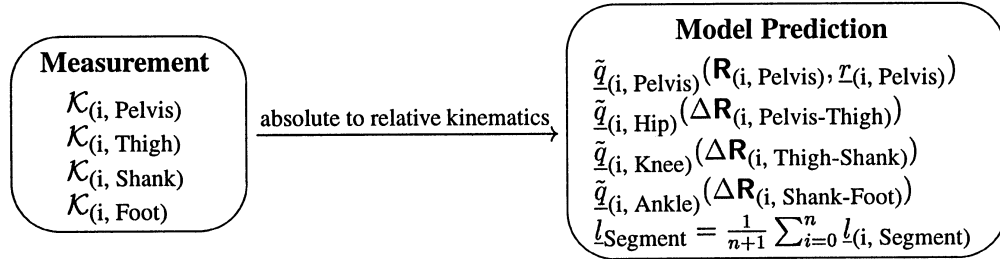


Figure 4: Adapting the model to the measured data

Inertia Properties

For prediction of inertia properties, two methods were regarded. The first approach is due to Winter [10] and is based on the equations:

$$\begin{aligned} l_{\text{seg}} &= |\underline{l}| \\ m_{\text{seg}} &= m' \cdot m_{\text{Body}} \\ \underline{r}_C &= \underline{r}'_C \cdot \underline{l} \\ I_x = I_y &= m_{\text{Body}} \cdot m' \cdot (i'_C \cdot l_{\text{seg}})^2 \end{aligned}$$

and the corresponding values from Table 1. Here, \underline{l} is the limb vector connecting the two joints at the ends of the limb, m_{Body} is the complete mass of the individual, m_{seg} is the mass of the limb, \underline{r}_C is the vector to the center of gravity of the limb, I_x, I_y, I_z , are the three principal moments of inertia, with $I_z = 0$ corresponding to the longitudinal axis of the limb, and i_C is the radius

of inertia. As a second approach, the inertia properties were approximated by homogeneous cylinders of equal length and mass as the corresponding limbs. With given density ρ_{seg} taken from Table 1, one obtains for the radius r_{cyl} and inertia of the cylinder

$$\begin{aligned} r_{\text{cyl}}^2 &= \frac{m_{\text{seg}}}{10^3 \rho \pi l_{\text{seg}}} \\ I_x = I_y &= \frac{1}{4} m_{\text{seg}} r_{\text{cyl}}^2 + \frac{1}{12} m_{\text{seg}} l_{\text{seg}}^2 \\ I_z &= \frac{1}{2} m_{\text{seg}} r_{\text{cyl}}^2 \\ \underline{r}_C &= \frac{1}{2} \underline{l} \end{aligned}$$

This model has three advantages: it (1) adapts better to the individual; (2) does not need to be scaled differently for children and adults; and (3) yields a non-vanishing value for the inertia about longitudinal axis.

Segment	$m' = \frac{m_{\text{seg}}}{m_{\text{Body}}}$	$r'_C = \frac{r_C}{l_{\text{seg}}}$	$i'_C = \frac{i_C}{l_{\text{seg}}}$	$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \right]$
Foot	0.0145	0.5	0.475	1.10
Shank	0.0465	0.433	0.302	1.09
Thigh	0.100	0.433	0.323	1.05
HeadArmTrunk	0.678	0.626	0.496	-

Table 1: Anthropometric data in [10]

Inverse Dynamic Model

The computation of the resultant torques at the human joints for given motion (position, velocity and acceleration) at the joints and given applied forces involves the solution of the inverse dynamics problem for the surrogate mechanism. This information can be easily established using the *kinetostatic transmission element* approach implemented in the object-oriented multibody library MIBILE [4], which is described next for better clarity. In the kinetostatic approach, the multibody system is regarded to be composed of two categories of objects: *state objects*, which hold information about position, velocity, acceleration, and load at

an arbitrary location (spatial or scalar), and *transmission elements*, which transmit this information from one set of state objects to another (Fig. 5).

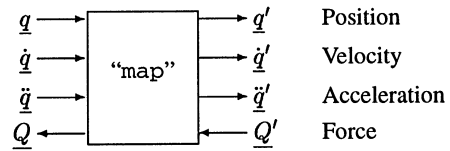


Figure 5: A simple transmission element.

As can be easily shown for a generic kinetostatic transmission element, each such object provides (1) a *motion transmission* function, consisting of the three sub-

operations

$$\begin{aligned} \text{position:} \quad \underline{q}' &= \varphi(\underline{q}) \\ \text{velocity:} \quad \underline{\dot{q}}' &= \mathbf{J}_\phi \underline{\dot{q}} \\ \text{acceleration:} \quad \underline{\ddot{q}}' &= \mathbf{J}_\phi \underline{\ddot{q}} + \dot{\mathbf{J}}_\phi \underline{\dot{q}} \end{aligned} \quad (1)$$

where $\mathbf{J}_\phi = \partial\varphi/\partial\mathbf{q}$ represents the $m \times n$ *Jacobian* of the transmission element; and (2) a *force-transmission* mapping

$$\text{force:} \quad \underline{Q} = \mathbf{J}_\phi^T \underline{Q}' + \hat{\underline{Q}} \quad (2)$$

which transmits forces in opposite direction using the same Jacobian as in the velocity transmission in transposed form. In the object-oriented implementation, these transmissions functions can be invoked through the virtual functions ‘doForce(...)’ and ‘doMotion(...)’, which are common to all kinetostatic transmission element implementations. Using these functions, it is easy to generate the inverse dynamics, which thus consists of a two-pass traversal of the structure resulting from the concatenation of the individual kinetostatic transmission elements. In the first pass, the motion transmission (position, velocity, acceleration) for

the composite structure is computed; this consists of invoking the motion function for all individual kinetostatic transmission elements from the base to the tips. In a second pass, the force transmission is computed; this consists of invoking the force transmission functions for all kinetostatic transmission elements contained in the chain in opposite direction to the motion transmission, i.e., from the tips to the base. In the present context, the complete system is composed of the kinetostatic transmission elements contained in the leg skeletons, appended by (1) force elements generating the applied forces, in the present case the ground force and the gravity force; and (2) mass elements modeling the inertia properties of rigid bodies, i.e., mass m , center of mass \mathbf{r}_C , and tensor of inertia Θ_S , through their corresponding d’Alembert forces and moments; in the present case these are the inertia properties of the limbs described above. By concatenating all these elements, one obtains a composite subsystem, termed ‘global kinematics’ or, symbolically, φ_S , which features $f = 15$ inputs collected in $\underline{q} = [q_1, \dots, q_{15}]^T$ according to the six inputs at the pelvis and three inputs at the hip, knee and ankle joint, respectively (Fig. 6).

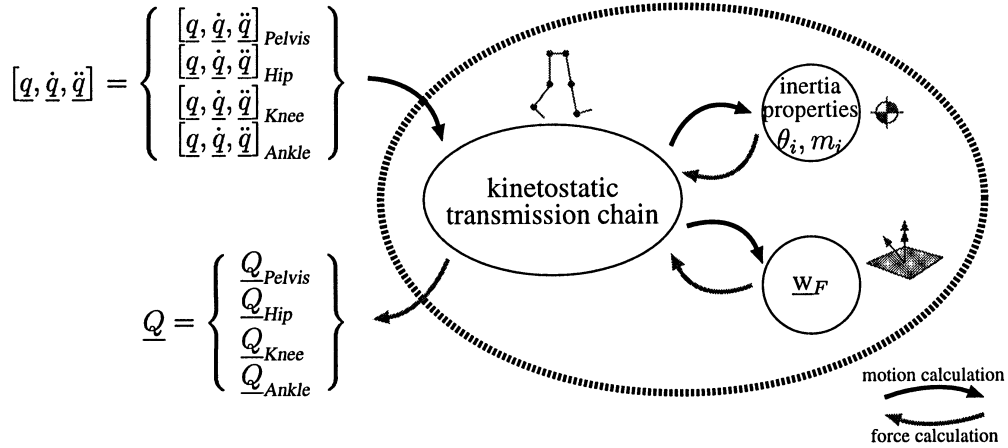


Figure 6: Model of inverse dynamics of the multibody system

The inverse dynamics $\varphi_S^{D^{-1}}$ of the mechanism then consists of invoking the motion transmission function and the force transmission function for φ_S , which yields a set of *residual* generalized forces \bar{Q} at the input joints which depend on the kinematic inputs \underline{q} and their time derivatives in the following manner:

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \varphi_S^{D^{-1}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{\ddot{q}}; \underline{w}^{(e)}; t) \\ &= -\mathbf{M}(\underline{q}; t) \underline{\ddot{q}} - \hat{\mathbf{Q}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}; \underline{w}^{(e)}; t),\end{aligned}\quad (3)$$

where $\underline{w}^{(e)}$ collects all externally applied forces, and \mathbf{M} and $\hat{\mathbf{Q}}$ are the generalized mass matrix and the generalized applied forces of the system, respectively. These

residual forces are the sought torques at the joints required to implement the captured motion.

Results

Using the models described above, it was possible to assess the quality of the model and its sensitivity with respect to length and inertia parameters. In Fig. 7 the variations of segment length for thigh and shank for corresponding flexion and extension displayed in Fig. 8 are depicted. As can be seen, the only significant change appears in the z-component, which is the coordinate aligned with the longitudinal axis of the limbs.

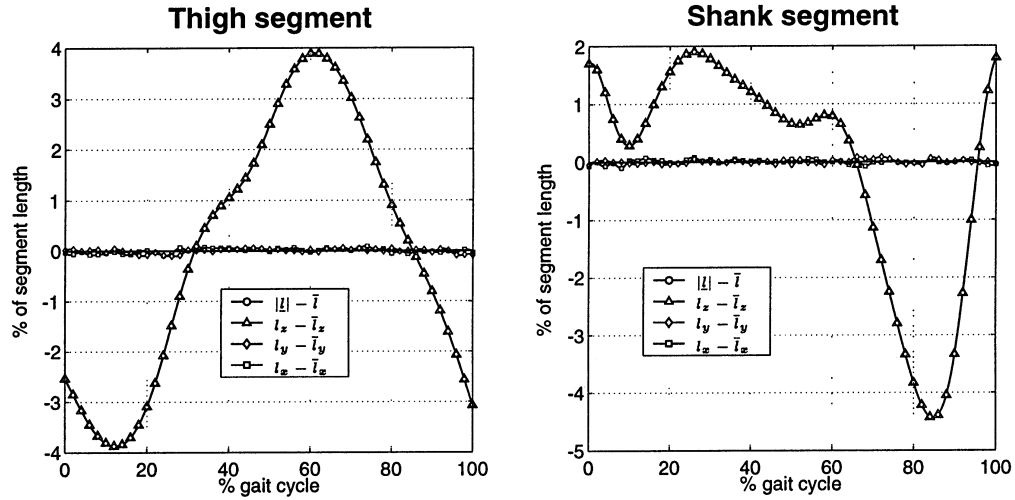


Figure 7: Variation of segment lengths over a gait cycle

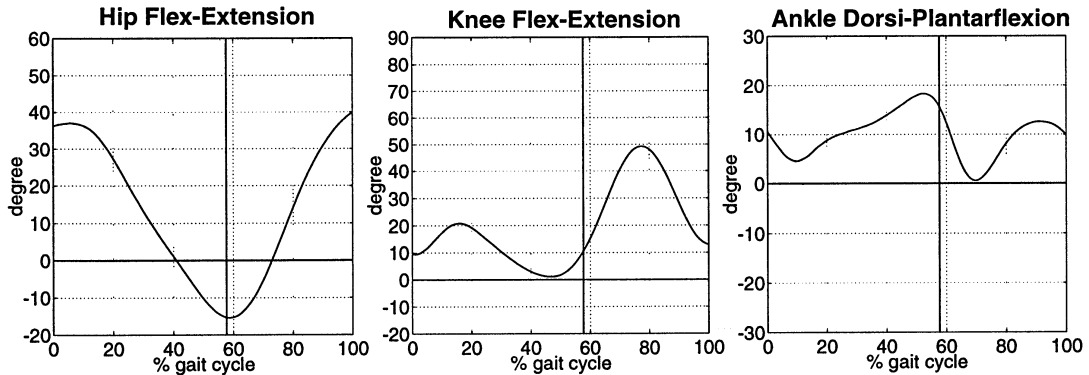


Figure 8: Flexion Angles

From the plots it is evident that a systematic error can be assumed, as the large variations show little noise. By comparing these plots with the corresponding plots of flexion angles at hip, knee, and ankle in Fig. 8, one can see, for example, that a flexion at the hip, i.e., a rotation of the leg upwards, causes a bone shortening, which is insensitive to knee flexion/extension; hence, it can be conjectured that the assumed hip joint center is too far in the posterior plane. Likewise, a flexion of the ankle causes a bone

shortening of the lower leg; hence, it may be conjectured that the assumed ankle joint is too far in the anterior plane. Thus, from the twin-skeleton model and the error plots, it is possible to correct the errors by re-defining appropriately the location of the assumed joint centers.

Figures (9) and (10) display the influence of bone length on the torques and the consumed power for knee and hip flexion and extension.

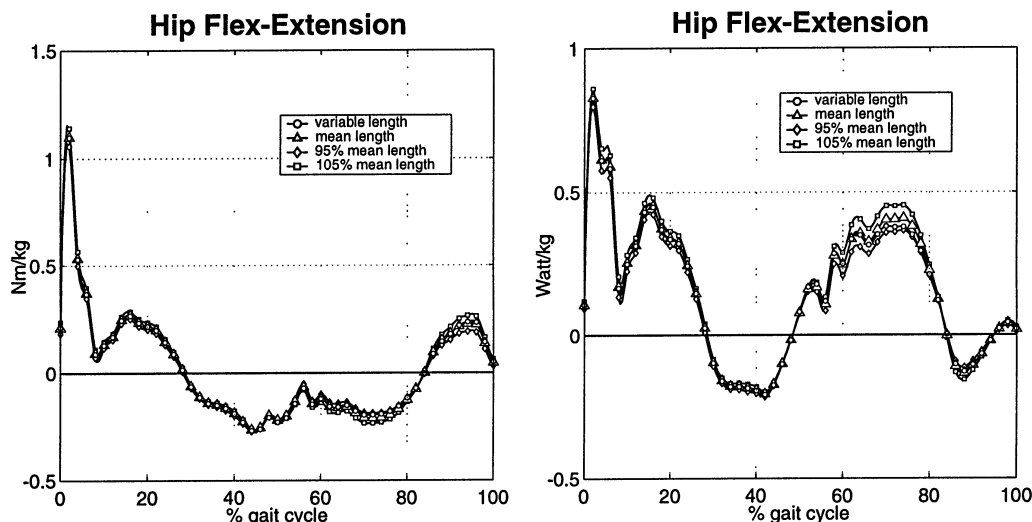


Figure 9: Hip flexion moment and power in dependence on segment length

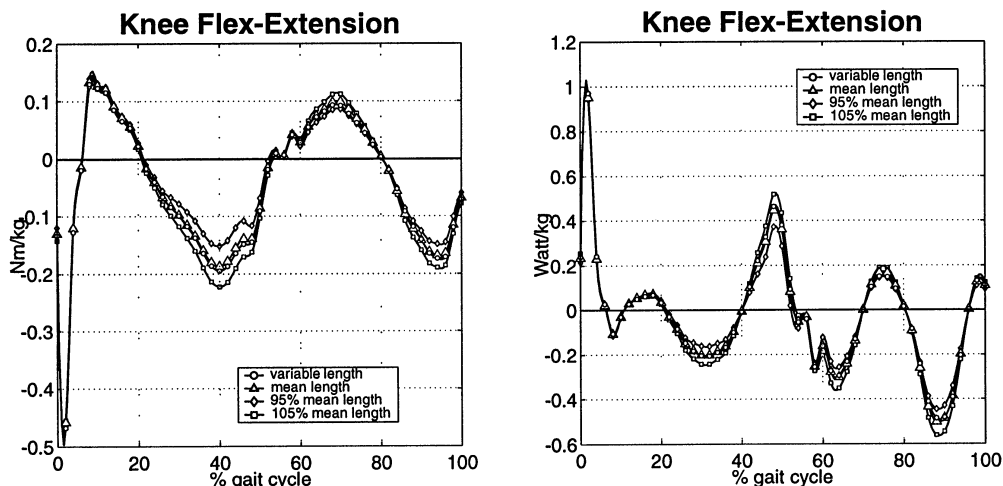


Figure 10: Knee flexion moment and power in dependence on segment length

As can be seen, although errors in bone length are important in the graphical visualisation, their influence on functional parameters is not significant compared to the

targeted improvement in walking motion by surgical measures. Hence, this effect is not of primary concern in chirurgical planning of treatment of spastic children.

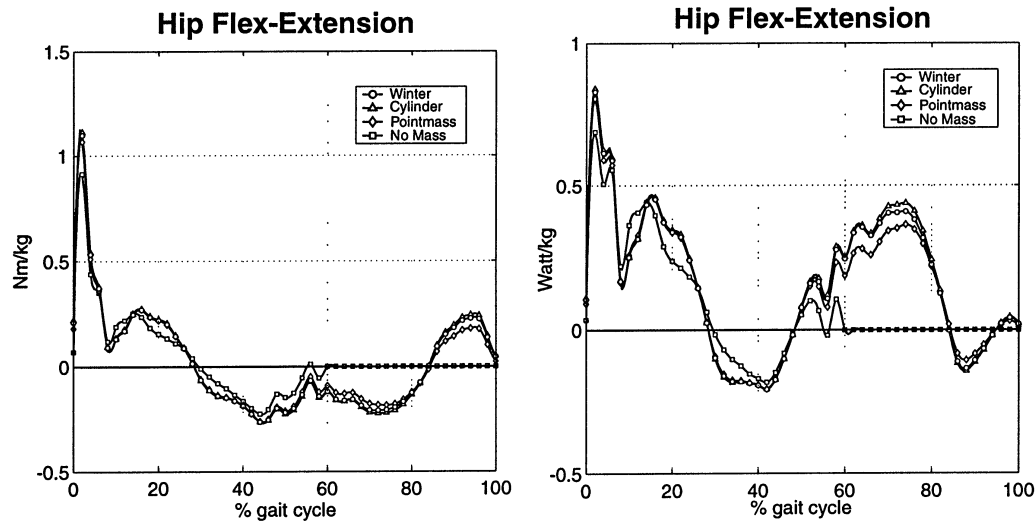


Figure 11: Hip flexion moment and power in dependence on the chosen approach for the mass property

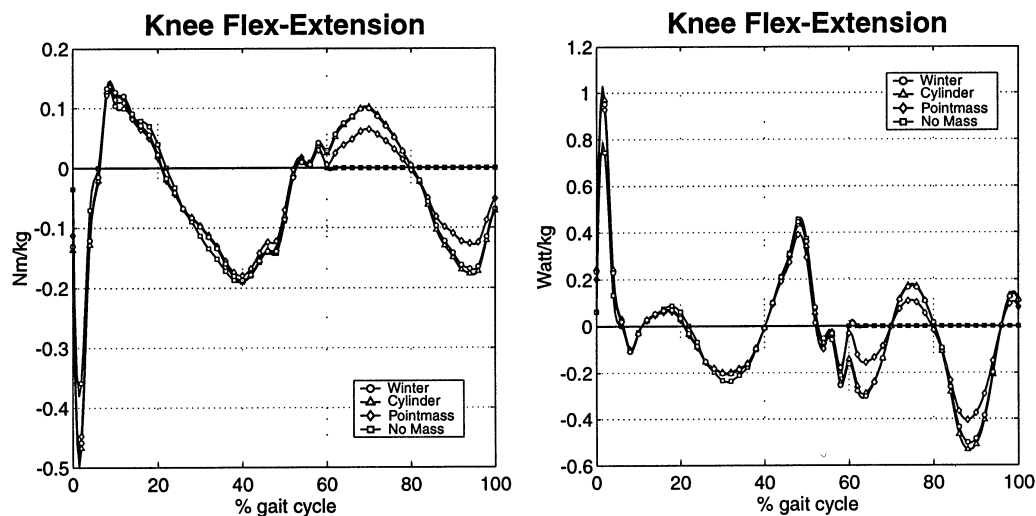


Figure 12: Knee flexion moment and power in dependence on the chosen approach for the mass property

Likewise, Fig. 11 and Fig. 12 show the effect on torque and power at the joints of different approaches to calculate the iner-

tia properties of the segments of the leg for a child. The different approaches have little influence on the diagnostic quantities.

Even the crude model of point masses yields here acceptable results, while during the stance phase also complete neglecting of the masses is allowable. Hence, as in the case of bone length variations, this influence is neglectable in the planning of surgical operations.

Conclusions

The developed object-oriented kinetostatic transmission element model of a human leg allows one to easily conduct sensitivity analysis operations for the human leg and to extend these to other applications, such as signal filtering, motion capturing, etc. Through the model it is possible to investigate the data, perform inverse dynamics and test the influence of different ap-

proaches in modeling in an effective manner. With the proposed twin skeleton mechanism of anatomic and predicted models it is possible to determine the sources of errors in the assumed placement of joint centers from simple mechanism analysis. The performed simulation runs showed (a) that the current measurement data assumes a hip joint center misplaced in the posterior plane and an ankle joint center misplaced in the anterior plane. Sensitivity analysis of bone lengths and inertia modelling showed little influence on functional diagnosis quantities such as torques and power at the joints. Future enhancements are planned such as estimation of variation of muscle length during a gait cycle before and after operation, and the possibility to realize muscle driven forward dynamics.

References

- [1] **Abel, MF, Damiano, DL, Pannunzio, M, et al.:** Muscle-tendon surgery in diplegic cerebral palsy: Functional and mechanical changes. *J Pediatr Orthop*, 19:366–75, 1999.
- [2] **DeLuca, PA, Davis, RB, Ounpuu, S, et al.:** Alternations in surgical decision making in patients with cerebral palsy based on three-dimensional gait analysis. *J Pediatr Orthop*, 17:608–14, 1997.
- [3] **Gage, JR:** Gait analysis: An essential tool in the treatment of cerebral palsy. *Clin Orthop*, 288:126–34, 1993.
- [4] **Kecskeméthy, A.:** *MATLAB Version 1.3 User's Guide*. Institut für Mechanik und Getriebelehre, Technische Universität Graz, 1999.
- [5] **Lee, EH, Goh, JC, and Bose, K:** Value of gait analysis in the assessment of surgery in cerebral palsy. *Arch Phys Med Rehabil*, 73:645–46, 1992.
- [6] **Ounpuu, S, Gage, JR, and Davis, RB:** Three-dimensional lower extremity joint kinetics in normal paediatric gait. *J Pediatric Orthop*, 11:341–49, 1991.
- [7] **Silver, RL, Garaza, J, and Rang, M:** The myth of muscle balance. a study of relative strength and excursions of normal muscles about the foot ankle. *J Bone Joint Surg Br*, 67:452–57, 1985.
- [8] **Sutherland, DH:** Outcome assessment in cerebral palsy: Has walking improved? In: Sussman, MD, ed. *The Diplegic Child*. American Academy of Orthopedic Surgeons, Illinois, U.S.A., pp. 133–45, 1992.
- [9] **Tachdjian, MO:** The neuromuscular system: Cerebral palsy. In: Wickland EH, Editor. *Pediatric Orthopaedics*. Philadelphia: W.B. Saunders Company., pp. 1616–17, 1990.
- [10] **Winter, D.:** *Biomechanics and motor control of human movement*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1990.